ORSAY

n° d'ordre : 1523

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD (XI)

CENTRE D'ORSAY

THÈSE

PRÉSENTÉE

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

René NICOLAS

INGÉNIEUR E.N.S.M.A.

DOCTEUR INGÉNIEUR

Vibrations libres non linéaires d'un profil aérodynamique au voisinage d'une vitesse critique de flottement.

Soutenue le 26 Juin 1975, devant la Commission d'examen.

MM. R. MAZET, Professeur à l'Université de Paris XI.....	*Président.*
G. COUPRY, Directeur scientifique à l'O.N.E.R.A.	*Membres.*
L. GAUTHIER, Professeur à l'Université de Paris VI	
R. SIESTRUNCK, Professeur à l'Université de Paris VI...	
R. TEMAM, Professeur à l'Université de Paris XI	

— 1975 —

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548127_0004

ORSAY
n° d'ordre : 1523

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD (XI)

CENTRE D'ORSAY

THÈSE

PRÉSENTÉE

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

René NICOLAS
INGÉNIEUR E.N.S.M.A.
DOCTEUR INGÉNIEUR

Vibrations libres non linéaires d'un profil aérodynamique au voisinage d'une vitesse critique de flottement.

Soutenue le 26 Juin 1975, devant la Commission d'examen.

MM. R. MAZET, Professeur à l'Université de Paris XI..... *Président.*
G. COUPRY, Directeur scientifique à l'O.N.E.R.A. .....
L. GAUTHIER, Professeur à l'Université de Paris VI ..... *Membres.*
R. SIESTRUNCK, Professeur à l'Université de Paris VI...
R. TEMAM, Professeur à l'Université de Paris XI .....

— 1975 —

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

TABLE DES MATIERES

	Pages
1.- Introduction.	1
2.- Etablissement du système différentiel.	5
2.1.- Forces aérodynamiques.	6
2.1.1.- Mise en équations.	6
2.1.2.- Résolution approchée.	17
2.2.- Forces d'inertie.	32
2.2.1.- Etude cinématique.	32
2.2.2.- Etude cinétique.	33
2.3.- Système différentiel.	34
2.3.1.- Forces de liaison.	34
2.3.2.- Equations différentielles.	35
3.- Analyse du système différentiel.	43
3.1.- Généralités.	44
3.1.1.- Forme canonique.	44
3.1.2.- Problème de Cauchy, solutions stationnaires.	50
3.1.3.- Stabilité.	52
3.2.- Système linéarisé.	52
3.2.1.- Equation caractéristique et vecteurs propres.	53
3.2.2.- Stabilité de l'équilibre.	59

3.3.- Système non linéaire. 75

3.3.1.- Etude du système au voisinage d'une vitesse critique de flottement. 77

3.3.2.- Etude d'un système sans vitesse critique de flottement. 105

4.- Applications numériques. 127

4.1.- Généralités. 127

4.2.- Exemples sans amortissement structural : $\varepsilon = 0$. 129

4.2.1.- Cas $\varpi = 3,0$. 130

4.2.2.- Cas $\varpi = 0,5$. 138

4.3.- Exemple avec amortissement structural : $\varepsilon \neq 0$. 143

4.3.1.- Calcul du couple $\left(u_{F_{cr}}, \varepsilon_{cr}\right)$. 143

4.3.2.- Exemple avec $\varepsilon = 0,023\ 54$. 147

4.3.3.- Cas où le facteur d'amortissement ε tend vers ε_{cr} à droite. 153

5.- Conclusion. 159

6.- Bibliographie. 161

E R R A T A

Page 17, ligne + 13, au lieu de "le rayon", lire "de rayon".

Page 28, ligne + 9, au lieu de "$-\pi\rho_o b$", lire "$-\pi\rho_o b^2$".

Page 36, ligne - 3, dans l'accolade, ajouter "$+b\delta\left(-U\sin\theta+b\frac{d\delta}{dt}+ab\frac{d\theta}{dt}\right)\frac{d\theta}{dt}$".

Page 52, ligne + 12, ajouter à la fin : "w_1".

Page 82, ligne + 10, au lieu de "$\mathcal{W}_o$", lire "$\mathcal{W}_1$".

Page 104, dans le tableau, intervertir "entrée en" et "sortie de".

Page 112, ligne - 8, au lieu de "T_{cr}", lire "T_{cr}^2".

Page 127, ligne - 5, au lieu de "j_c", lire "θ_c".

Page 148, ligne + 1, ajouter successivement "$\mathcal{U}_2$" et "$\mathcal{V}_2$".

Page 159, lignes + 8 et + 9, supprimer "ces oscillations limites... temps fini".

1.- INTRODUCTION

Le flottement aéroélastique d'une surface portante, pour un avion volant dans l'atmosphère à une vitesse constante, est une instabilité dynamique du système mécanique constitué par la surface déformable et l'air ambiant en mouvement relatif. Plus précisément, la théorie linéaire en mécanique des vibrations indique que, si la partie réelle d'une racine de l'équation caractéristique du système linéarisé s'annule sans que disparaisse sa partie imaginaire, cela signifie qu'il existe une partie du mouvement libre qui consiste en une oscillation auto-entretenue ou auto-oscillation ; il faut pour cela que certaines des forces auxquelles est soumis le système fournissent l'énergie que dissipent les amortissements positifs du système vibrant et cette énergie est alors évidemment apportée par le milieu extérieur c'est-à-dire l'ensemble propulsif. Si la partie réelle d'une racine devient positive, cas d'une action anti-amortissante l'emportant sur les amortissements positifs du système, cela signifie qu'une partie du mouvement libre s'amplifie de manière exponentielle ; on dit alors qu'il y a "flottement aéroélastique" ou "divergence", selon que cette partie du mouvement est ou n'est pas oscillatoire.

Les actions auxquelles est soumis un système aéroélastique peuvent donc lui apporter de l'énergie et, par suite, amplifier en principe un petit mouvement libre au point de sortir du domaine de validité de la linéarisation. Les effets non linéaires peuvent être dus à quatre causes, à savoir : les forces d'inertie, les forces aérodynamiques, les forces de rappel élastiques et les résistances passives de déformation ; dans l'étude qui sera présentée, seules les deux premières catégories seront considérées. Ces non-linéarités peuvent conduire, pour

le système libre, à l'existence d'oscillations limites, c'est-à-dire d'oscillations périodiques dont l'amplitude et la fréquence sont indépendantes des conditions initiales, phénomène dont ne peut pas rendre compte la théorie linéaire. Par ailleurs, les oscillations limites pouvant se présenter aussi bien dans le cas où la position d'équilibre est stable que dans le cas où elle est instable, et alors elles sont respectivement instables ou stables, une compréhension réaliste du flottement aéroélastique ne peut donc être envisagée que dans le cadre d'une théorie non linéaire de la mécanique des vibrations.

En aéroélasticité, de nombreuses études ont déjà été effectuées en ce qui concerne l'analyse du flottement de panneau ou de coque dans le domaine non linéaire, mais, à notre connaissance, le problème du flottement non linéaire de voilure n'a pas été abordé, ce qui justifie le travail effectué et exposé dans ce document. Celui-ci comprend trois parties principales et se limite au cas du flottement de flexion-torsion pour lequel des résultats formels et numériques sont présentés ; d'une façon générale, les différentes hypothèses retenues sont introduites au fur et à mesure de leur nécessité dans le courant de l'exposé. Le chapitre 2 concerne l'établissement du système d'équations différentielles relatif au comportement du système mécanique étudié ; même en nous restreignant au cas d'un écoulement subsonique autour d'un profil mince rectiligne indéformable et en nous limitant à un fluide incompressible, nous n'avons trouvé aucune expression générale des forces aérodynamiques instationnaires ce qui nous a d'abord conduit à aborder ce problème et à le résoudre, tout au moins d'une façon approchée mais qui fournit, pour des cas simples classiques, des résultats concordant avec ceux trouvés dans la littérature. Dans le chapitre 3, le système différentiel précédent, présenté sous forme matricielle, est analysé et sa résolution est abordée par une méthode analytique de développement asymptotique qui permet d'étudier la stabilité des solutions ; l'existence d'oscillations limites au voisinage d'une vitesse critique de flottement est mise en évidence et l'influence de la non-linéarité est étudiée pour deux cas particuliers importants en pratique. Enfin, des résultats numériques, limités mais significatifs, sont présentés dans le chapitre 4, à titre d'application des notions précédentes.

Cette étude a été exécutée sous la direction de Monsieur le Professeur R. Mazet, Correspondant de l'Académie des Sciences. Qu'il veuille agréer l'expression de ma respectueuse gratitude, en particulier pour l'intérêt constant qu'il a manifesté pour mon travail, pour les critiques qu'il m'a présentées et pour les conseils qu'il m'a donnés ; je le remercie aussi d'avoir consenti à présider le jury de soutenance.

Je prie Monsieur G. Coupry, Directeur Scientifique des Structures à l'O.N.E.R.A., et Messieurs les Professeurs L. Gauthier, R. Siestrunck, de l'Université de Paris VI, et R. Témam, de l'Université de Paris XI, qui ont bien voulu accepter de faire partie du jury de soutenance, de vouloir agréer l'expression de ma profonde reconnaissance.

Je voudrais signaler la contribution de l'Etablissement d'Aquitaine de la Société nationale industrielle Aérospatiale, pour le travail d'impression, et je l'en remercie.

2.- ETABLISSEMENT DU SYSTEME DIFFERENTIEL

Dans le présent chapitre, nous allons exposer la mise en équations d'un problème d'aéroélasticité particulier relatif au modèle simplifié du flottement binaire en flexion-torsion. La partie principale sera constituée par la détermination des forces aérodynamiques s'exerçant sur un profil indéformable, de ligne moyenne rectiligne et sans épaisseur. Dans le chapitre suivant, l'analyse du système est faite en utilisant une méthode analytique des perturbations qui, en plus de fournir un moyen d'établir l'existence de cycles limites, permet, d'une part, d'étudier la stabilité de ces oscillations limites et, d'autre part, de montrer que, dans le cas de l'instabilité, la croissance infinie des oscillations est atteinte en un temps fini ; cependant, cette méthode ne rend pas possible l'utilisation de forces harmoniques et nous nous sommes donc attachés, pour plus de généralité, à obtenir des expressions différentielles pour les forces aérodynamiques instationnaires non linéaires (on peut remarquer d'ailleurs, dès maintenant, que, en dehors des variables physiques imposées, la formulation obtenue introduira un paramètre caché). Pour le reste, la mise en équations se fera à partir des théorèmes généraux de la mécanique rationnelle.

Remarquons enfin que les diverses hypothèses simplificatrices retenues ne seront introduites qu'au fur et à mesure de leur nécessité dans le cours du développement.

2.1.- FORCES AERODYNAMIQUES.

Il s'agit de déterminer le torseur défini à partir du système des pressions exercées par un fluide au repos à l'infini sur une aile rectangulaire d'allongement infini animée, perpendiculairement à l'envergure, d'un mouvement instationnaire sans choc, voisin d'une translation rectiligne et uniforme par rapport à un repère d'espace absolu ; toute section droite est supposée limitée par un profil indéformable, infiniment mince et sans courbure. Nous sommes donc dans le cas particulier d'un mouvement plan, parallèlement à un plan $(\mathcal{P})$ de section droite (plan de figure, par exemple). Ce plan, dans lequel nous étudierons l'écoulement, étant rapporté à deux axes rectangulaires fixes O_1x_1 et O_1y_1 , de vecteurs unitaires respectifs $\vec{x}_1$ et $\vec{y}_1$, on notera $\vec{z}_1$ le vecteur unitaire normal à $(\mathcal{P})$, porté par l'axe O_1z_1 tel que le système d'axes de coordonnées cartésiennes $O_1x_1y_1z_1$ soit direct et normé ; il constituera un repère d'espace absolu. La variable z_1 ne joue donc aucun rôle et le torseur des pressions sera relatif à une surface cylindrique droite, de génératrices parallèles à $\vec{z}_1$ et de hauteur unité, admettant le profil (c) comme courbe directrice.

Nous rappellerons d'abord, d'une façon résumée, les principales hypothèses, d'ailleurs habituelles, à partir desquelles l'étude sera effectuée, ainsi que les résultats essentiels déjà acquis classiquement. Nous présenterons ensuite une résolution approchée du problème permettant d'obtenir le torseur des forces aérodynamiques non stationnaires sur une tranche d'aile d'épaisseur unité.

2.1.1.- Mise en équations.

Après quelques considérations générales de mécanique des fluides classiques, nous passerons au cas particulier de l'écoulement autour d'un profil rectiligne sans épaisseur (plaque plane), mouvement que nous étudierons selon la méthode du potentiel complexe.

2.1.1.1.- Problème général.

Nous allons donner les diverses relations nécessaires et suffisantes pour poser correctement le problème à résoudre : hypothèses de base et équations générales de la mécanique, assortiesde conditions initiales et aux limites.

2.1.1.1.1.- Données et hypothèses de base.

Elles définissent la nature physique du fluide étudié du point de vue mécanique et les relations de ce milieu avec l'extérieur. Nous supposerons principalement que :

- le fluide est parfait, c'est-à-dire dénué de viscosité ; le tenseur des contraintes est alors défini par un scalaire positif, la pression p ;
- il est à densité de masse volumique ρ invariable ; l'équation d'état est donc de la forme $\rho = \rho_0$ (constante) ;
- les efforts à distance, tant intérieurs qu'extérieurs, sont nuls dans le fluide.

2.1.1.1.2.- Equations générales de la mécanique.

Dans tout ce qui suit, nous ferons systématiquement usage des variables d'Euler (coordonnées du point géométrique P_1 , fixe dans le repère d'espace $O_1 x_1 y_1 z_1$, et temps t). Compte tenu des hypothèses précédentes, il suffit de considérer, en tout point intérieur du fluide, les équations suivantes, le vecteur $\vec{V}_a$ représentant la vitesse absolue au point P_1 de coordonnées cartésiennes x_1 , y_1 , z_1 :

- l'équation de continuité du milieu :

$$div_{P_1} \vec{V}_a = 0 \quad , \tag{1}$$

- l'équation indéfinie (vectorielle) du mouvement :

$$\rho_0 \left[\overrightarrow{grad}_{P_1} \vec{V}_a \cdot \vec{V}_a + \left(\frac{\partial \vec{V}_a}{\partial t} \right)_{P_1} \right] = - \overrightarrow{grad}_{P_1} p \quad , \tag{2}$$

traduisant l'existence d'un potentiel uniforme A des accélérations absolues : $A = -\frac{p}{\rho_0} + A_{0(t)}$.

On dispose donc de quatre équations scalaires pour déterminer les quatre variables dépendantes inconnues $(V_a)_{x_1}$, $(V_a)_{y_1}$, $(V_a)_{z_1}$, p ; ces équations constituent un système aux dérivées partielles du premier ordre. Elles s'accompagnent donc, en outre de conditions initiales données,de conditions aux limites.

2.1.1.1.3.- Conditions aux limites.

Tout d'abord et par hypothèse, la vitesse absolue du fluide est nulle à l'infini et la pression y prend la valeur constante p_∞.

Par ailleurs, pour un fluide parfait, la condition nécessaire de glissement sur le profil est suffisante. On écrira donc que la composante normale de la vitesse relative du fluide par rapport à la paroi avec laquelle il est en contact est nulle c'est-à-dire, par exemple, si $G_{(P_1,t)}$ représente, à chaque instant, l'équation de la paroi en mouvement absolu :

$$\vec{V_a}.\overrightarrow{\text{grad}}_{P_1} G + \left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)_{P_1} = 0 \quad . \qquad (3)$$

2.1.1.1.4.- Conditions initiales

Naturellement, l'écoulement n'étant pas stationnaire, il faut, de plus, pour déterminer la solution, se donner les conditions initiales. Nous considérerons qu'à l'instant initial ($t=0$) le champ des vitesses est celui de l'écoulement stationnaire autour de l'aile animée, dans le fluide au repos à l'infini, d'une translation rectiligne et uniforme de vitesse absolue $\vec{U}$ perpendiculaire à l'envergure.

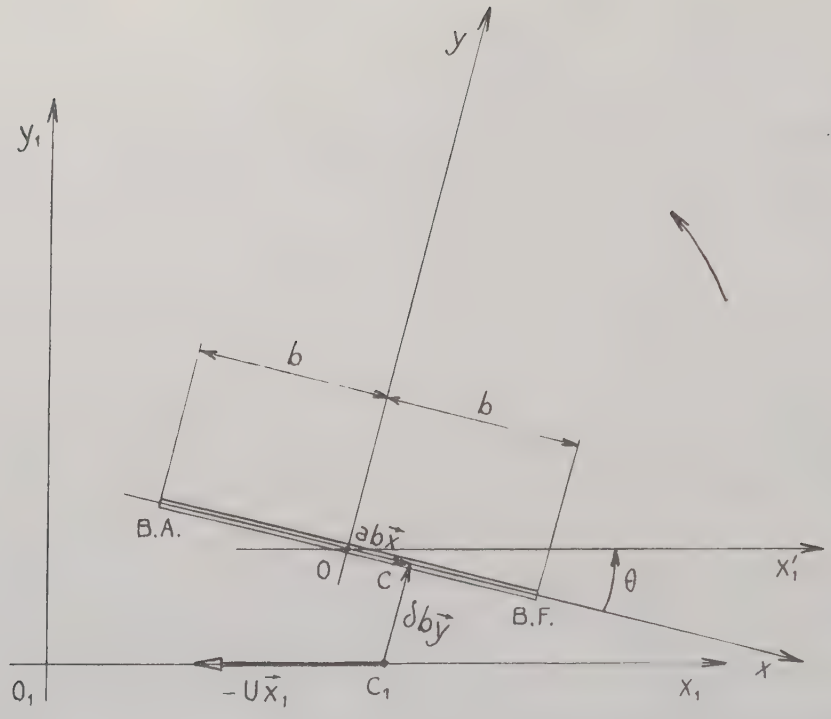
2.1.1.2.- Cas de l'aile plane et sans épaisseur.

Nous traiterons maintenant le cas particulier du profil rectiligne infiniment mince et indéformable dont le mouvement est une approximation de celui d'une aile d'envergure limitée se déformant en flexion et torsion.

2.1.1.2.1.- Généralités.

Le mouvement étudié est plan c'est-à-dire parallèle au plan fixe rapporté au système orthonormé de coordonnées cartésiennes $O_1x_1y_1$. Par ailleurs, nous désignerons par O le milieu du segment de droite représentant le profil, de longueur $2b$, et par Ox l'axe de portance nulle du profil, orienté positivement du bord d'attaque arrondi (B.A.) au bord de fuite aigu (B.F.) ; nous noterons alors Oxy le système orthonormé de coordonnées rectilignes lié au profil et de même sens que le précédent c'est-à-dire direct. Dans tout ce qui suit, le radian sera pris pour unité de mesure des angles.

Sur la corde du profil, nous considérerons un point C qui sera particularisé dans la suite (§ 2.3.1) et tel que $\overrightarrow{OC} = ab\vec{x}$ (a = constante). D'autre part et sans perte de généralité, nous supposerons que la vitesse $\vec{U}$ est parallèle à O_1x_1 , c'est-à-dire que $\vec{U} = -U\vec{x}_1$ (U = constante positive). Enfin, le point C_1 de l'axe O_1x_1 ayant le point C comme projection orthogonale sur l'axe Ox , nous poserons $\overrightarrow{C_1C} = \delta b\vec{y}$ et $(\vec{x}_1, \vec{x}) = -\theta$ avec $0 \leqslant \theta < 2\pi$.



Nous allons maintenant reprendre les équations générales et expliciter les conditions du paragraphe 2.1.1.1 dans le cas particulier qui nous intéresse.

2.1.1.2.2.- Equations.

Il y a intérêt, pour faire l'étude de l'écoulement envisagé, à utiliser les axes $0x$ et $0y$ liés au profil. Remarquons qu'il s'agit simplement d'un changement de variables et non d'un changement de repère ; le mouvement étudié avec les variables x et y est celui observé dans le repère $0_1x_1y_1$. Par la suite, nous désignerons par $(V_a)_x$ et $(V_a)_y$ les composantes scalaires du vecteur vitesse absolue $\vec{V}_a$ sur les axes $0x$ et $0y$ et par $(V_o)_x$ et $(V_o)_y$ les composantes scalaires, sur les mêmes axes, du vecteur vitesse absolue $\vec{V}_o$ du point 0 lié au profil.

La formule intrinsèque (1) permet d'exprimer la continuité du milieu fluide sous la forme :

$$\frac{\partial (V_a)_x}{\partial x} + \frac{\partial (V_a)_y}{\partial y} = 0 \quad . \qquad (4)$$

D'autre part, les équations indéfinies scalaires du mouvement s'écrivent, à partir de (2) :

$$\frac{\partial (V_a)_x}{\partial x}(V_a)_x + \frac{\partial (V_a)_x}{\partial y}(V_a)_y + \frac{\partial (V_a)_x}{\partial t} + (V_a)_y \frac{d\theta}{dt} - \left[(V_o)_x + y\frac{d\theta}{dt}\right]\frac{\partial (V_a)_x}{\partial x} - \left[(V_o)_y - x\frac{d\theta}{dt}\right]\frac{\partial (V_a)_y}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_o}\frac{\partial p}{\partial x} \quad , \qquad (5.1)$$

$$\frac{\partial (V_a)_y}{\partial x}(V_a)_x + \frac{\partial (V_a)_y}{\partial y}(V_a)_y + \frac{\partial (V_a)_y}{\partial t} - (V_a)_x \frac{d\theta}{dt} - \left[(V_o)_x + y\frac{d\theta}{dt}\right]\frac{\partial (V_a)_x}{\partial y} - \left[(V_o)_y - x\frac{d\theta}{dt}\right]\frac{\partial (V_a)_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_o}\frac{\partial p}{\partial y} \quad . \qquad (5.2)$$

Compte tenu de l'équation de continuité (4), les équations précédentes permettent d'écrire :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial (V_a)_y}{\partial x} - \frac{\partial (V_a)_x}{\partial y}\right] = 0 \quad , \qquad (6)$$

avec :

$$\frac{d}{dt} = (V_a)_x \frac{\partial}{\partial x} + (V_a)_y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t} \quad , \qquad (7)$$

ainsi que :

$$-(V_a)_y\left[\frac{\partial (V_a)_y}{\partial x} - \frac{\partial (V_a)_x}{\partial y}\right] + \frac{\partial (V_a)_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{2}V_a^2 - \left[(V_o)_x + y\frac{d\theta}{dt}\right](V_a)_x - \left[(V_o)_y - x\frac{d\theta}{dt}\right](V_a)_y\right\} = -\frac{1}{\rho_o}\frac{\partial p}{\partial x} \quad , \qquad (8.1)$$

$$+(V_a)_x\left[\frac{\partial (V_a)_y}{\partial x} - \frac{\partial (V_a)_x}{\partial y}\right] + \frac{\partial (V_a)_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{2}V_a^2 - \left[(V_o)_x + y\frac{d\theta}{dt}\right](V_a)_x - \left[(V_o)_y - x\frac{d\theta}{dt}\right](V_a)_y\right\} = -\frac{1}{\rho_o}\frac{\partial p}{\partial y} \quad . \qquad (8.2)$$

Par ailleurs, en introduisant la fonction de courant de l'écoulement $\psi(x,y,t)$ définie à une fonction additive près du temps t et déterminée par les relations :

$$(V_a)_x = +\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \qquad (9.1)$$

$$(V_a)_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad , \qquad (9.2)$$

qui satisfont la condition de solénoïdalité de la vitesse absolue du courant exprimée par l'équation (4), la condition de glissement (3) montre que, à tout instant t fixé,

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = \left[-(V_0)_y + x \frac{d\theta}{dt} \right] \frac{dx}{ds} + \left[(V_0)_x + y \frac{d\theta}{dt} \right] \frac{dy}{ds} \qquad (10)$$

sur la paroi ; cette expression détermine, à une fonction additive de t près, la valeur ψ_c de ψ le long du profil défini par $x = x_{c(s)}$ et $y = y_{c(s)}$:

$$\psi_c = -(V_0)_y x_c + (V_0)_x y_c + \frac{1}{2} \frac{d\theta}{dt} (x_c^2 + y_c^2) \quad . \qquad (11)$$

Enfin, si l'on suppose que l'aile est mise en mouvement sans choc, aussi bien antérieurement que postérieurement à la translation rectiligne et uniforme de référence, l'écoulement primitivement irrotationnel, puisque au repos, reste, partout et indéfiniment, irrotationnel d'après le théorème de Lagrange traduit par l'équation (6) :

$$\frac{\partial (V_a)_y}{\partial x} - \frac{\partial (V_a)_x}{\partial y} = 0 \quad . \qquad (12)$$

Cependant, en supprimant la viscosité dans les lois de comportement du fluide c'est-à-dire dans les équations générales de la mécanique et non dans leur solution, on a laissé échapper dans cette solution des nappes de tourbillons ; nous sommes donc conduits à reconnaître la possibilité de formation théorique, au sein de l'écoulement du fluide parfait, de nappes de tourbillons singuliers rattachées à l'aile. Dans la région irrotationnelle, il existe une fonction $\varphi(x,y,t)$, appelée le potentiel des vitesses et définie à une fonction additive près du temps t , telle que

$$(V_a)_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad , \qquad (13_1)$$

$$(V_a)_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad . \qquad (13_2)$$

On peut alors écrire simplement les équations (8) sous la forme

$$p = k_{(t)} - \rho_o \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} V_a^2 - \left[(V_o)_x + y \frac{d\theta}{dt} \right] (V_a)_x - \left[(V_o)_y - x \frac{d\theta}{dt} \right] (V_a)_y \right\} \qquad (14)$$

qui permet de calculer la pression p à partir de la vitesse $\vec{V_a}$, hors des zones singulières ; remarquons que $k(t)$ est une constante dépendant du temps, déterminée à l'aide des conditions initiales.

2.1.1.2.3.- Potentiel complexe de l'écoulement

Les résultats (9) et (13) pouvant s'écrire encore, hors des singularités,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = + \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \qquad (15_1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad , \qquad (15_2)$$

les égalités précédentes montrent que les fonctions φ et ψ satisfont au système classique des équations de Cauchy-Riemann et que, par suite, la fonction

$$f_{(z,t)} = \varphi_{(x,y,t)} + j \psi_{(x,y,t)} \qquad (16)$$

est une fonction analytique de la variable complexe $z = x + jy$, dépendant du paramètre t ; elle n'est définie qu'à une fonction additive près du temps t et elle est dénommée le potentiel complexe de l'écoulement absolu. Sa dérivée partielle par rapport à z , qui est également une fonction analytique de z , est la conjuguée de $\left[(V_a)_x + j (V_a)_y \right]$ qui est l'affixe du vecteur vitesse absolue vrai :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = (V_a)_x - j (V_a)_y \quad ; \qquad (17)$$

c'est, par définition, la vitesse complexe absolue W de l'écoulement considéré.

En résumé, selon cette conception, la description cinématique de l'écoulement étudié, c'est-à-dire la détermination du champ $\vec{V}_{a\,(P,t)}$ hors de la coupure du profil et des zones singulières, est entièrement déduite de la seule fonction analytique $f_{(z,t)}$, régulière et satisfaisant :

- à des conditions initiales données ;
- aux conditions aux limites suivantes :
  - à l'infini, le fluide étant au repos, $\lim_{|z|\to\infty} \frac{\partial f}{\partial z} = 0$,
  - sur le profil, la partie imaginaire de f vérifie la condition (11).

La résolution du problème sera facilitée, comme on le verra au paragraphe 2.1.2.1, par l'utilisation de la représentation conforme qui fournit la base d'une méthode puissante pour la recherche de l'écoulement en ramenant le problème considéré à un autre problème de solution plus facile à construire.

2.1.1.2.4.- Efforts globaux sur le profil.

Avant d'étudier en détail le mouvement du fluide, nous évaluerons les efforts exercés par ce fluide sur l'aile. Nous savons calculer la pression en chaque point et il reste à déterminer le torseur des efforts globaux exercés sur le profil ; rappelons que, lorsque nous parlons de pressions ou de forces sur le profil, il s'agit, en réalité, de pressions ou de forces s'exerçant sur une portion de surface cylindrique droite de hauteur unité admettant ce profil comme courbe directrice.

Le profil (c) étant orienté positivement dans le sens direct, sur l'élément ds de ce contour (c), le vecteur contrainte a pour module p ds et il est dirigé suivant le vecteur unitaire de la normale intérieure de composantes scalaires $-\alpha$, $-\beta$ sur Ox et Oy , α et β désignant les cosinus directeurs du vecteur unitaire de la normale extérieure définis par les relations :

$$\alpha = +\frac{dy}{ds} \quad , \tag{18$_1$}$$

$$\beta = -\frac{dx}{ds} \quad . \tag{18$_2$}$$

La résultante générale $\vec{\mathcal{F}}$ des actions du fluide sur le profil, de composantes scalaires $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$, peut être déterminée par la force complexe

$$\mathcal{F} = \mathcal{X} - j\,\mathcal{Y} \tag{19}$$

qui se calcule donc par la formule :

$$\mathcal{F} = \int_c -p\,\frac{dy}{ds}\,ds - j\int_c p\,\frac{dx}{ds}\,ds \quad , \tag{20}$$

c'est-à-dire :

$$\mathcal{F} = -j\int_c p\,d\bar{z} \quad , \tag{21}$$

$\bar{z}$ désignant le conjugué du nombre complexe z .

La mesure algébrique $\mathcal{M}_o$ du moment résultant, par rapport à l'origine 0, du système des pressions a pour valeur :

$$\mathcal{M}_o = \int_c p\left(x\,\frac{dx}{ds} + y\,\frac{dy}{ds}\right)ds \tag{22}$$

ou, en introduisant le symbole $\mathcal{R}e\{Z\}$ pour désigner la partie réelle de la quantité complexe Z :

$$\mathcal{M}_o = \mathcal{R}e\left\{\int_c jz\,d\mathcal{F}\right\} \quad . \tag{23}$$

En remplaçant p par sa valeur donnée par la relation (14), nous pouvons écrire :

$$\mathcal{F} = j\rho_o\int_c \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}V_a^2 - \left[(V_o)_x + y\,\frac{d\theta}{dt}\right](V_a)_x - \left[(V_o)_y - x\,\frac{d\theta}{dt}\right](V_a)_y\right\} d\bar{z} \quad . \tag{24}$$

Mais, à partir des relations (11) et (16), nous avons, sur le profil (c) :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\bar{f}}{\partial t} + j\,\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial\bar{f}}{\partial t} + j\left[-x\,\frac{d(V_o)_y}{dt} + y\,\frac{d(V_o)_x}{dt} + \frac{x^2+y^2}{2}\,\frac{d^2\theta}{dt^2}\right] \quad , \tag{25}$$

d'où, pour un profil infiniment mince :

$$\int_c \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,d\bar{z} = \int_c \frac{\partial\bar{f}}{\partial t}\,d\bar{z} \quad . \tag{26}$$

Par ailleurs, on vérifie facilement que, sur le profil :

$$\frac{1}{2}V_o^2\,d\bar{z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2dz-j\,\frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}dx+\frac{\partial \psi}{\partial y}dy\right)\quad,$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2dz-\left\{\left[(V_o)_x-j(V_o)_y\right]+j\frac{d\theta}{dt}\bar{z}\right\}\left[(V_a)_x\,dx+(V_a)_y\,dy\right]+\left\{\left[(V_o)_x+y\frac{d\theta}{dt}\right](V_a)_x+\left[(V_o)_y-x\frac{d\theta}{dt}\right](V_a)_y\right\}d\bar{z}\quad,\qquad(27)$$

d'où, pour un profil infiniment mince :

$$\mathcal{F}=j\rho_o\int_c\frac{\partial \bar{f}}{\partial t}d\bar{z}+\frac{1}{2}j\rho_o\int_c\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2dz-j\rho_o\int_c\left\{\left[(V_o)_x-j(V_o)_y\right]+j\frac{d\theta}{dt}\bar{z}\right\}\left[(V_a)_x\,dx+(V_a)_y\,dy\right]\quad,$$

$$=j\rho_o\int_c\frac{\partial \bar{f}}{\partial t}d\bar{z}+\frac{1}{2}j\rho_o\int_c\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2dz-j\rho_o\left[(V_o)_x-j(V_o)_y\right]\int_c\frac{\partial f}{\partial z}dz+\rho_o\frac{d\theta}{dt}\int_c\bar{z}\,\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}d\bar{z}+$$

$$+\rho_o\left[(V_o)_x-j(V_o)_y\right]\int_c\left\{\left[(V_o)_y-x\frac{d\theta}{dt}\right]dx-\left[(V_o)_x+y\frac{d\theta}{dt}\right]dy\right\}-j\rho_o\frac{d\theta}{dt}\int_c\bar{z}\left\{\left[(V_o)_y-x\frac{d\theta}{dt}\right]dx-\left[(V_o)_x+y\frac{d\theta}{dt}\right]dy\right\}\quad.\qquad(28)$$

L'avant-dernière intégrale curviligne s'annule par la formule de Green et la dernière est nulle pour un profil sans épaisseur. La formule (28) prend alors la forme simple suivante dite première formule de Blasius généralisée, dans le cas d'un profil infiniment mince :

$$\mathcal{F}=\frac{1}{2}j\rho_o\int_c\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2dz-j\rho_o\left[(V_o)_x-j(V_o)_y\right]\int_c\frac{\partial f}{\partial z}dz+\rho_o\frac{d\theta}{dt}\int_c\bar{z}\,\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}d\bar{z}+j\rho_o\int_c\frac{\partial \bar{f}}{\partial t}d\bar{z}\quad.\qquad(29)$$

En remarquant que nous nous plaçons toujours dans le cas d'un profil sans épaisseur, nous obtenons facilement, à partir de ce qui précède, la forme suivante, pour la formule (23) donnant le moment résultant en O :

$$\mathcal{M}_o=\mathcal{R}e\left\{-\frac{1}{2}\rho_o\int_c\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2z\,dz+\rho_o\left[(V_o)_x-j(V_o)_y\right]\int_c\frac{\partial f}{\partial z}z\,dz+j\rho_o\frac{d\theta}{dt}\int_c\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}z\bar{z}\,d\bar{z}-\rho_o\int_c\frac{\partial \bar{f}}{\partial t}z\,d\bar{z}\right\}\quad.\qquad(30)$$

Mais, dans notre cas particulier :

$$\mathcal{R}e\left\{\int_c\frac{\partial \bar{f}}{\partial t}z\,d\bar{z}\right\}=\int_c\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x\,dx+y\,dy)=\mathcal{R}e\left\{\frac{1}{2}\int_c\frac{\partial f}{\partial t}d(z\bar{z})\right\}\qquad(31)$$

et :

$$\mathcal{R}e\left\{j\int_c\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}z\bar{z}\,d\bar{z}\right\}=\int_c(x^2+y^2)\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}dx+\frac{\partial \psi}{\partial y}dy\right)=0\quad.\qquad(32)$$

L'expression (30) prend alors la forme simple suivante dite deuxième formule de Blasius généralisée, dans le cas d'un profil infiniment mince :

$$\mathcal{M}_o=\mathcal{R}e\left\{-\frac{1}{2}\rho_o\int_c\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2z\,dz+\rho_o\left[(V_o)_x-j(V_o)_y\right]\int_c\frac{\partial f}{\partial z}z\,dz-\frac{1}{2}\rho_o\int_c\frac{\partial f}{\partial t}d(z\bar{z})\right\}\quad.\qquad(33)$$

2.1.2.- Résolution approchée.

Les formules de Blasius (29) et (33) permettront d'obtenir le torseur des pressions sur un profil sans épaisseur lorsque le potentiel complexe $f_{(z,t)}$ sera connu. Nous allons donc nous attacher à déterminer celui-ci ; plus exactement, nous chercherons une solution approchée, dite quasi-stationnaire, du problème cinématique en adoptant une hypothèse simplificatrice classique pour ce qui concerne les singularités tourbillonnaires de l'écoulement.

2.1.2.1.- Etude cinématique de l'écoulement.

2.1.2.1.1.- Généralités.

Soit (d) le domaine du plan $[z = x+jy]$ extérieur au profil (c) et (D) le domaine du plan $[Z = X+jY]$ extérieur au cercle (C) centré à l'origine $0'$ et le rayon $\frac{b}{2}$. La solution du problème posé au paragraphe 2.1.1.2.3 s'obtient plus simplement en transformant, par une représentation conforme $z = H_{(Z)}$, le domaine (D) en le domaine (d) avec correspondance des points à l'infini des deux plans $[z]$ et $[Z]$. Si $F_{(Z,t)}$ est le potentiel complexe d'un écoulement donné, défini dans (D), et si $h_{(z)}$ est la relation réciproque de $H_{(Z)}$, la fonction

$$f_{(z,t)} = F_{(h_{(z)},t)} \tag{34}$$

est le potentiel complexe d'un nouvel écoulement, défini dans (d), qui est dit l'écoulement transformé de l'écoulement donné par la transformation conforme définie par les fonctions réciproques

$$z = H_{(Z)} \quad , \quad Z = h_{(z)} \quad . \tag{35}$$

Les vitesses complexes des deux écoulements sont liées, en deux points homologues où

$$f_{(z,t)} = F_{(Z,t)} \quad , \tag{36}$$

par la relation :

$$w = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial Z}\frac{dZ}{dz} = W\frac{dh}{dz} \quad . \tag{37}$$

Puisque, par hypothèse, les plans $[z]$ et $[Z]$ se superposent à l'infini, cela signifie que

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{dh}{dz} = \lim_{|Z|\to\infty} \frac{dH}{dZ} = 1 \quad ; \tag{38}$$

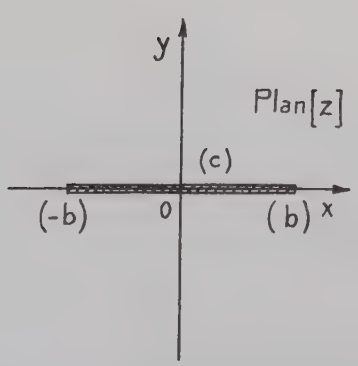
alors, les vitesses complexes w et W s'identifient aussi à l'infini :

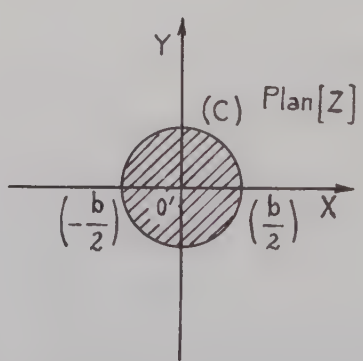
$$\lim_{|z|\to\infty} w = \lim_{|Z|\to\infty} W \quad . \tag{39}$$

Dans le cas particulier qui nous intéresse, pour faire l'application de la représentation conforme, nous partirons du plan complexe $[z = x+jy]$ coupé par une fente rectiligne s'étendant suivant l'axe $\vec{x}$, de $x=-b$ à $x=b$, et nous utiliserons la transformation de Joukowsky suivante :

$$z = Z + \frac{b^2}{4Z} \tag{40}$$

qui est compatible avec les conditions précédentes et qui établit une correspondance ponctuelle, bicontinue et biunivoque, entres les contours-frontières (c) et (C) des domaines respectifs (d) et (D).





2.1.2.1.2.- Détermination approchée du potentiel complexe.

Tout d'abord, le potentiel complexe $F_{(z,t)}$ cherché, défini dans (D), doit satisfaire aux conditions aux limites ci-après, $\mathcal{Im}\{Z\}$ désignant la partie imaginaire de la quantité complexe Z et Z_c l'affixe d'un point courant du cercle (C) :

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{\partial F}{\partial Z} = 0 \quad , \tag{41}$$

$$\mathcal{Im}\left\{F_{(Z_c,t)} - \left[(V_o)_x - j(V_o)_y\right]\left(Z_c + \frac{b^2}{4Z_c}\right) - \frac{1}{2}j\frac{d\theta}{dt}\left(Z_c + \frac{b^2}{4Z_c}\right)\left(\overline{Z}_c + \frac{b^2}{4\overline{Z}_c}\right)\right\} = 0 \quad , \tag{42}$$

à une fonction additive du temps t près.

Par ailleurs, dans ce qui suit, nous ferons deux hypothèses. La première sera celle de Joukowsky, qui assurera une vitesse finie au bord de fuite de l'aile supposé aigu, c'est-à-dire la condition :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial Z}\right)_{\left(\frac{b}{2}\right)} = 0 \quad . \tag{43}$$

La seconde portera sur les singularités tourbillonnaires et nous supposerons que nous pouvons schématiser le sillage rotationnel suivant une ligne unique, lieu de tourbillons singuliers ponctuels s'échappant à la trace du bord de fuite ; les termes correspondant à ces tourbillons apparaîtront dans l'expression du potentiel complexe et il y aura lieu, par ailleurs, de tenir compte de leurs mouvements relatifs au profil, ce qui compliquera notablement la question. Remarquons dès maintenant que l'approximation qui sera envisagée ultérieurement concernera précisément les positions de ces tourbillons libres.

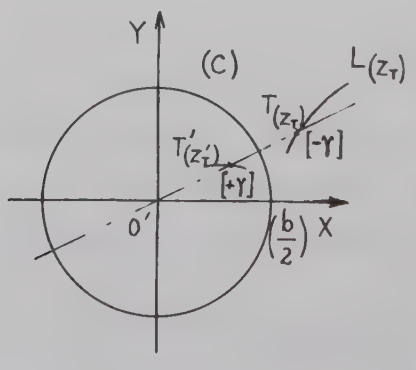
Par conséquent, dans le cas général où $(V_o)_x$, $(V_o)_y$ et $\frac{d\theta}{dt}$ sont des fonctions quelconques du temps, à toute variation

$$d\Gamma_c = \gamma_{(t)}\, dt \tag{44}$$

de la circulation Γ_c de la vitesse absolue suivant le profil, correspondra l'échappement, à la pointe $z=b$, d'un tourbillon d'intensité $-d\Gamma_c$, lequel sera entraîné par le mouvement du fluide ; pour écrire le potentiel complexe, il faudra prendre en considération ces tourbillons libres dont les positions sont à priori inconnues. Considérons alors les images, d'affixes Z_τ , des tourbillons, dans le plan du cercle (C) ; la trajectoire de l'un de ces tourbillons $T_{(Z_\tau)}$ est, en général, différente du lieu $L_{(Z_\tau)}$ des divers tourbillons à un instant t , de sorte que Z_τ devra être considéré comme une fonction de deux variables indépendantes τ et t , τ étant l'instant d'apparition du tourbillon ($\tau \leq t$). Nous envisagerons aussi les images $T'_{(Z'_\tau)}$ des tourbillons précédents par rapport au cercle (C), avec

$$Z_\tau \overline{Z'_\tau} = \frac{b^2}{4} \quad , \tag{45}$$

et nous aurons donc à considérer, à chaque instant, deux courbes tourbillonnaires, lieux des points d'affixes Z_τ et Z'_τ , inverses par rapport au cercle (C) ; pour remplir la condition limite sur le profil, nous considérerons que, pour l'écoulement correspondant à ces deux lignes tourbillonnaires, le cercle (C) est une ligne de courant c'est-à-dire que, si, pendant un intervalle de temps $d\tau$ ($0<\tau<t$), la circulation Γ_c de la vitesse absolue autour du profil a varié de $d\Gamma_c$, on a, à l'instant t , les intensités tourbillonnaires $-d\Gamma_{c(\tau)}$ en $Z_{\tau(t,\tau)}$ et $d\Gamma_{c(\tau)}$ en $Z'_{\tau(t,\tau)}$.



Dans ces conditions, si la circulation de la vitesse autour du profil commence à varier à l'instant $t=0$ à partir de sa valeur initiale Γ_0 , on aura, à un instant suivant ($0<t$), le potentiel complexe $F_{(z,t)}$ suivant :

$$F_{(z,t)} = -j(V_o)_y \frac{b^2}{2z} + j\frac{d\theta}{dt}\frac{b^4}{16z^2} - j\frac{\Gamma_o}{2\pi}\log z + j\frac{1}{2\pi}\int_o^t \gamma_{(\tau)} \log \frac{z - z_{\tau(t,\tau)}}{z - \dfrac{b^2}{4\bar{z}_{\tau(t,\tau)}}}\, d\tau \quad , \qquad (46)$$

qui vérifiera les conditions aux limites (41) et (42). Dans l'expression précédente du potentiel complexe interviennent les deux fonctions inconnues $\gamma_{(\tau)}$ et $z_{(t,\tau)}$ que l'on doit déterminer en tenant compte, d'une part, de la condition de Joukowsky (43) à remplir à la pointe du profil et, d'autre part, de ce que, d'après le théorème de Helmholtz, les tourbillons libres sont soumis au mouvement du fluide défini par le potentiel complexe $F_{(z,t)}$ qui précède.

La condition de Joukowsky donne immédiatement, pour $\gamma(t)$, l'équation intégrale de Volterra de première espéce suivante :

$$2(V_o)_y - b\frac{d\theta}{dt} - \frac{\Gamma_o}{\pi b} + \frac{1}{2\pi}\int_o^t \left[\frac{1}{\frac{b}{2} - z_{\tau(t,\tau)}} - \frac{1}{\frac{b}{2} - \frac{b^2}{4\bar{z}_{\tau(t,\tau)}}}\right]\gamma_{(\tau)}\, d\tau = 0 \qquad (47)$$

et, en particulier, à l'instant initial, la relation classique :

$$\Gamma_o = 2\pi b\left[(V_o)_y\right]_{(t=0)} \quad , \qquad (48)$$

puisque nous nous sommes placés dans le cas où le mouvement à étudier est précédé d'une translation uniforme, celle-ci étant d'ailleurs définie par :

$$(V_o)_y = -U\sin\theta_o \quad , \quad \text{pour } t \leq 0 \quad . \qquad (49)$$

D'autre part, en écrivant que les tourbillons sont soumis au potentiel complexe $f_{(z,t)}$, on obtient :

$$\frac{\partial \bar{z}_\tau}{\partial t} + \left[(V_o)_x - j(V_o)_y\right] + j\frac{d\theta}{dt}\bar{z}_\tau = \lim_{\varepsilon \to 0}\left\{\lim_{z \to z_\tau}\left[\frac{\partial f}{\partial z} - j\frac{1}{2\pi}\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \frac{\gamma(\tau')}{z - z_{\tau(t,\tau')}}\, d\tau'\right]\right\} \quad , \qquad (50)$$

$z_{\tau(t,\tau)}$ étant l'affixe, dans le plan xOy du profil, du tourbillon apparu à un instant τ compris entre 0 et t et $\gamma_{(\tau)}$ étant la vitesse de variation correspondante de la circulation de la vitesse autour du profil. Enfin, on doit avoir :

$$z_{\tau(t,t)} \equiv b \quad , \tag{51}$$

puisque, par hypothèse, les tourbillons libres apparaissent à la pointe du profil. En passant au plan $[Z]$, l'égalité (50) s'écrit :

$$\left(1-\frac{b^2}{4\bar{Z}_\tau^2}\right)\frac{\partial \bar{Z}_\tau}{\partial t}+\left[(V_0)_x-j(V_0)_y\right]+j\frac{d\theta}{dt}\left(\bar{Z}_\tau+\frac{b^2}{4\bar{Z}_\tau}\right)=\frac{j}{1-\dfrac{b^2}{4Z_\tau^2}}\left[(V_0)_y\frac{b^2}{2Z_\tau^2}-\frac{d\theta}{dt}\frac{b^4}{8Z_\tau^3}-\frac{\Gamma_0}{2\pi Z_\tau}\right]+$$

$$+j\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\lim_{Z\to Z_\tau}\left[\frac{1}{\dfrac{dH}{d\bar{Z}}(Z)}\int_0^{t}\left(\frac{1}{Z-Z_{\tau(t,\tau')}}-\frac{1}{Z-\dfrac{b^2}{4\bar{Z}_{\tau(t,\tau')}}}\right)\gamma_{(\tau')}d\tau'-\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon}\frac{\gamma_{(\tau')}}{H_{(Z)}-H_{\left[Z_{\tau(t,\tau')}\right]}}d\tau'\right]\right\}, \tag{52}$$

avec (cf. éq. (35) et (40)) :

$$H_{(Z)} \equiv Z+\frac{b^2}{4Z} \quad . \tag{53}$$

Pour calculer les limites, nous écrirons :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\lim_{Z\to Z_\tau}\left[\frac{1}{\dfrac{dH}{d\bar{Z}}(Z)}\int_0^{t}\frac{\gamma_{(\tau')}}{Z-Z_{\tau(t,\tau')}}d\tau'-\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon}\frac{\gamma_{(\tau')}}{H_{(Z)}-H_{\left[Z_{\tau(t,\tau')}\right]}}d\tau'\right]\right\}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{\dfrac{dH}{d\bar{Z}}(Z_\tau)}\left(\int_0^{\tau-\varepsilon}\frac{\gamma_{(\tau')}}{Z_{\tau(t,\tau)}-Z_{\tau(t,\tau')}}d\tau'+\int_{\tau+\varepsilon}^{t}\frac{\gamma_{(\tau')}}{Z_{\tau(t,\tau)}-\bar{Z}_{\tau(t,\tau')}}d\tau'\right)\right]+$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\lim_{Z\to Z_\tau}\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon}\left[\frac{1}{\dfrac{dH}{d\bar{Z}}(Z)}\frac{1}{Z-Z_{\tau(t,\tau')}}-\frac{1}{H_{(Z)}-H_{\left[Z_{\tau(t,\tau')}\right]}}\right]\gamma_{(\tau')}d\tau'\right\} \quad ; \tag{54}$$

un calcul simple montre que :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\lim_{Z\to Z_\tau}\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon}\left[\frac{1}{\dfrac{dH}{d\bar{Z}}(Z)}\frac{1}{Z-Z_{\tau(t,\tau')}}-\frac{1}{H_{(Z)}-H_{\left[Z_{\tau(t,\tau')}\right]}}\right]\gamma_{(\tau')}d\tau'\right\}=-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon}\left[\frac{\dfrac{d^2H}{d\bar{Z}^2}}{2\left(\dfrac{dH}{dZ}\right)^2}\right]_{\left[Z_{\tau(t,\tau)}\right]}\gamma_{(\tau')}d\tau'=0 . \tag{55}$$

Il reste donc, pour l'équation (52) :

$$\left(1-\frac{b^2}{4\overline{Z}_\tau^2}\right)\frac{\partial\overline{Z}_\tau}{\partial t}+\left[(V_0)_x-j(V_0)_y\right]+j\frac{d\theta}{dt}\left(\overline{Z}_\tau+\frac{b^2}{4\overline{Z}_\tau}\right)=\frac{j}{1-\frac{b^2}{4Z_\tau^2}}\left[(V_0)_y\frac{b^2}{2Z_\tau^2}-\frac{d\theta}{dt}\frac{b^4}{8Z_\tau^3}-\frac{\Gamma_0}{2\pi Z_\tau}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2\pi}\oint_0^t\left(\frac{1}{Z_\tau(t,\tau)-Z_\tau(t,\tau')}-\frac{1}{Z_\tau(t,\tau)-\frac{b^2}{4\overline{Z}_\tau(t,\tau')}}\right)\gamma(\tau')d\tau'\right], \quad (56)$$

la dernière intégrale définie étant prise en valeur principale au sens de Cauchy. L'égalité précédente doit être vérifiée quel que soit τ

$$0 \leqslant \tau \leqslant t$$

et on doit avoir enfin, d'après l'équation (51),

$$Z_\tau(t,t) \equiv \frac{b}{2} \quad , \qquad (57)$$

puisque la pointe du profil correspond, dans le plan du cercle (C), à $Z=\frac{b}{2}$.

Le système principal d'équations (47) et (56) ainsi obtenu et qui doit définir les fonctions $\gamma(\tau)$ et $Z_\tau(t,\tau)$ est très compliqué et sa résolution ne paraît pouvoir être abordée qu'approximativement. En particulier, si l'on peut estimer, de façon approchée, la fonction complexe $Z_\tau(t,\tau)$ qui définit, à chaque instant, la configuration des tourbillons libres, on en déduira théoriquement, par résolution de l'équation intégrale en $\gamma(\tau)$ (47), les répartitions de circulation dans le sillage tourbillonnaire et autour du profil. Dans la suite, nous nous bornerons à ce point de vue, qu'il serait évidemment souhaitable de compléter. Plus particulièrement, nous supposerons, ce qui constitue l'hypothèse de quasi-stationnarité, que le comportement de z_τ est celui de $z_\tau(t,\tau)$ au voisinage de $(t-\tau)$ infini. Or, $z_\tau(t,\tau)$ et donc $Z_\tau(t,\tau)$ sont asymptotiquement équivalents à $U(t-\tau)e^{j\theta(t)}$ pour $(t-\tau)$ tendant vers l'infini c'est-à-dire, en particulier, pour t assez grand :

$$z_\tau(t,\tau) \sim Z_\tau(t,\tau) \sim U(t-\tau)e^{j\theta(t)} \quad , \quad (t-\tau)\to\infty \quad \text{donc} \quad t\to\infty \quad . \quad (58)$$

Cette approche revient à supposer que le mouvement absolu, dans le repère $O_1x_1y_1$, d'un tourbillon $T_{(t,\tau)}$ tend très rapidement vers le mouvement qui, autour du point fixe $C_{1(\tau)}$, est déterminé par la relation $\overrightarrow{C_{1(\tau)}T_{(t,\tau)}} = \overrightarrow{C_{1(t)}O_{(t)}}$. En effet, dans ces conditions et en supposant, ce qui sera vérifié par la suite, que l'intégrale $\int_0^\infty \gamma_{(\tau)} d\tau$ ait un sens, nous avons :

$$\frac{\partial Z_\tau}{\partial t} \sim j \frac{d\theta}{dt} Z_\tau \quad , \tag{59_1}$$

$$\oint_0^t \left(\frac{1}{Z_{\tau(t,\tau)} - Z_{\tau(t,\tau')}} - \frac{1}{Z_{\tau(t,\tau)} - \frac{b^2}{4\bar{Z}_{\tau(t,\tau')}}} \right) \gamma_{(\tau')} d\tau' \sim v_{(t,\tau)} \text{ finie} \tag{59_2}$$

et l'équation (56) est alors vérifiée. Nous prendrons donc, comme approximation de $\gamma_{(\tau)}$, la partie principale de cette fonction correspondant à $(t-\tau)$ infini c'est-à-dire, d'après la condition (47) :

$$2(V_0)_y - b\frac{d\theta}{dt} - \frac{\Gamma_0}{\pi b} \sim \frac{1}{\pi b} \int_0^t \gamma_{(\tau)} d\tau \quad ; \tag{60}$$

cette relation montre que l'intégrale $\int_0^\infty \gamma_{(\tau)} d\tau$ a un sens et permet d'obtenir la répartition de circulation dans le sillage tourbillonnaire :

$$\gamma \sim \pi b \left[2\frac{d(V_0)_y}{dt} - b\frac{d^2\theta}{dt^2} \right] \quad . \tag{61}$$

Il reste maintenant à déterminer le torseur défini à partir du système des pressions exercées par le fluide sur le profil en mouvement.

2.1.2.2.- Torseur des forces aérodynamiques.

Nous utiliserons les formules (29) et (33) qui donnent respectivement l'affixe de la résultante générale par rapport aux axes Oxy liés au profil et le moment résultant par rapport au centre O de ce profil.
Sachant que la transformation conforme utilisée est définie par la fonction

$$H_{(Z)} = Z + \frac{b^2}{4Z} \tag{62}$$

et que le potentiel complexe est déterminé par l'expression (46), les éléments de réduction précédents sont donnés par les formules suivantes :

$$\mathcal{X}-j\mathcal{Y}=\rho_o\left\{\frac{j}{2}\int_c\left(\frac{\partial F}{\partial Z}\right)^2\frac{1}{H'}dZ-j\left[(V_o)_x-j(V_o)_y\right]\int_c\frac{\partial F}{\partial Z}dZ+\frac{d\theta}{dt}\int_c\bar{H}\frac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{Z}}d\bar{Z}+j\int_c\frac{\partial\bar{F}}{\partial t}\bar{H}'d\bar{Z}\right\}\quad,\qquad(63)$$

$$\mathcal{M}_o=\rho_o\,\mathcal{R}e\left\{-\frac{1}{2}\int_c\left(\frac{\partial F}{\partial Z}\right)^2\frac{H}{H'}dZ+\left[(V_o)_x-j(V_o)_y\right]\int_c\frac{\partial F}{\partial Z}HdZ-\frac{1}{2}\int_c\frac{\partial F}{\partial t}d(H\bar{H})\right\}\quad,\qquad(64)$$

avec :

$$H'_{(z)}\equiv 1-\frac{b^2}{4Z^2}\quad.\qquad(65)$$

2.1.2.2.1.- Expressions générales des éléments de réduction en O .

Il faut principalement calculer les intégrales curvilignes complexes suivantes :

$$\int_c\left(\frac{\partial F}{\partial Z}\right)^2\frac{H^m}{H'}dZ\quad,\quad\int_c\frac{\partial F}{\partial Z}H^m dZ\quad,\quad\int_c\frac{\partial\bar{F}}{\partial t}\bar{H}'d\bar{Z}\quad,\quad\int_c\frac{\partial F}{\partial t}d(H\bar{H})\quad,\quad(m=0,1)\quad,$$

en utilisant la relation (56). L'emploi de la méthode des résidus permet de se ramener à des intégrales prises entre 0 et t , même si les fonctions $Z_{\tau(t,\tau)}$ et $\gamma(t)$ sont inconnues. En effet, tous calculs effectués, nous obtenons :

$$\int_c\left(\frac{\partial F}{\partial Z}\right)^2\frac{1}{H'}dZ=2\int_o^t\left\{\left(1-\frac{b^2}{4\bar{Z}^2_{\tau(t,\tau)}}\right)\frac{\partial\bar{Z}_\tau}{\partial t}(t,\tau)+\left[(V_o)_x-j(V_o)_y\right]_{(t)}+j\frac{d\theta}{dt}(t)\left(\bar{Z}_{\tau(t,\tau)}+\frac{b^2}{4\bar{Z}_{\tau(t,\tau)}}\right)\right\}\gamma_{(\tau)}d\tau\quad,\quad(66_1)$$

$$\int_c\left(\frac{\partial F}{\partial Z}\right)^2\frac{H}{H'}dZ=-j\frac{\Gamma_o^2}{2\pi}+2\int_o^t\left(Z_{\tau(t,\tau)}+\frac{b^2}{4Z_{\tau(t,\tau)}}\right)\left\{\left(1-\frac{b^2}{4\bar{Z}^2_{\tau(t,\tau)}}\right)\frac{\partial\bar{Z}_\tau}{\partial t}(t,\tau)+\left[(V_o)_x-j(V_o)_y\right]_{(t)}+j\frac{d\theta}{dt}(t)\left(\bar{Z}_{\tau(t,\tau)}+\frac{b^2}{4\bar{Z}_{\tau(t,\tau)}}\right)\right\}\gamma_{(\tau)}d\tau\quad,\quad(66_2)$$

$$\int_c\frac{\partial F}{\partial Z}dZ=\Gamma_o+\int_o^t\gamma_{(\tau)}d\tau\quad,\qquad(66_3)$$

$$\int_c \frac{\partial F}{\partial Z} H dZ = -\pi b^2 (V_0)_y + \frac{b^2}{4}\int_0^t \left(\frac{1}{Z_\tau(t,\tau)} + \frac{1}{\bar{Z}_\tau(t,\tau)}\right)\gamma(\tau)d\tau \quad , \tag{66$_4$}$$

$$\int_c \frac{\partial \bar{F}}{\partial t}\bar{H}' d\bar{Z} = \pi b^2 \frac{d(V_0)_y}{dt} + \int_0^t \left(\frac{b^2}{4Z_\tau^2(t,\tau)}\frac{\partial Z_\tau}{\partial t}(t,\tau) + \frac{b^2}{4\bar{Z}_\tau^2(t,\tau)}\frac{\partial \bar{Z}_\tau}{\partial t}(t,\tau)\right)\gamma(\tau)\,d\tau \quad , \tag{66$_5$}$$

$$\int_c \frac{\partial F}{\partial t} d(H\bar{H}) = -\pi\frac{b^4}{4}\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{b^4}{8}\int_0^t \left(\frac{1}{Z_\tau^3(t,\tau)}\frac{\partial Z_\tau}{\partial t}(t,\tau) + \frac{1}{\bar{Z}_\tau^3(t,\tau)}\frac{\partial \bar{Z}_\tau}{\partial t}(t,\tau)\right)\gamma(\tau)d\tau \quad . \tag{66$_6$}$$

Nous aurons donc :

$$X + jY = \rho_0\left\{j\left[(V_0)_x + j(V_0)_y\right]\Gamma_0 - j\pi b^2\frac{d(V_0)_y}{dt} - \pi b^2 (V_0)_y\frac{d\theta}{dt}\right\} -$$

$$-\rho_0\int_0^t\left[j\frac{\partial}{\partial t}\left(Z_\tau(t,\tau) - \frac{b^2}{4\bar{Z}_\tau(t,\tau)}\right) + \frac{d\theta}{dt}(t)\left(Z_\tau(t,\tau) - \frac{b^2}{4\bar{Z}_\tau(t,\tau)}\right)\right]\gamma(\tau)d\tau \quad , \tag{67}$$

$$M_0 = \rho_0\left[-\pi b^2 (V_0)_x (V_0)_y + \pi\frac{b^4}{8}\frac{d^2\theta}{dt^2}\right] -$$

$$-\rho_0 \mathcal{R}e\int_0^t\left\{\left[(V_0)_x - j(V_0)_y\right]_{(t)}\left(Z_\tau(t,\tau) - \frac{b^2}{4\bar{Z}_\tau(t,\tau)}\right) + \left(\bar{Z}_\tau(t,\tau) + \frac{b^2}{4\bar{Z}_\tau(t,\tau)}\right)\left(1 - \frac{b^2}{4Z_\tau^2(t,\tau)}\right)\frac{\partial Z_\tau}{\partial t}(t,\tau) + \right.$$

$$\left. + \frac{b^4}{8Z_\tau^3(t,\tau)}\frac{\partial Z_\tau}{\partial t}(t,\tau)\right\}\gamma(\tau)d\tau \quad . \tag{68}$$

L'utilisation de ces formules, générales pour un profil rectiligne infiniment mince, est immédiate dès que l'on connait $\gamma(t)$ et le sillage tourbillonnaire, donnés par les équations (47) et (56). Nous allons donc les transformer en utilisant les hypothèses faites à la fin du paragraphe 2.1.2.1.2 sur le mouvement des tourbillons.

2.1.2.2.2.- Approximation retenue

Le schéma envisagé, pour le sillage tourbillonnaire, dans l'hypothèse dite de quasi-stationnarité, consiste principalement à supposer que $\left|\frac{1}{Z_T}\right|$ est négligeable devant $|Z_T|$ et que l'on peut écrire :

$$Z_T \sim U(t-\tau)e^{j\theta(t)} \quad , \tag{58}$$

d'où, en particulier,

$$\int_0^t \gamma_{(\tau)}d\tau \sim -\Gamma_0 + 2\pi b(V_0)_y - \pi b^2 \frac{d\theta}{dt} \quad . \tag{60}$$

Dans ces conditions, les expressions (67) et (68) donnent :

$$\mathcal{X}+j\mathcal{Y} \sim \rho_0\left\{-\left(\Gamma_0+\pi b^2\frac{d\theta}{dt}\right)(V_0)_y + j\left[\Gamma_0(V_0)_x - \pi b^2\frac{d(V_0)_y}{dt}\right]\right\} - j\rho_0 U e^{j\theta}\int_0^t \gamma_{(\tau)}d\tau \quad , \tag{69$_1$}$$

$$\mathcal{M}_0 \sim \rho_0\left[-\pi b^2(V_0)_x(V_0)_y + \pi\frac{b^4}{8}\frac{d^2\theta}{dt^2}\right] - \rho_0 U\,\mathcal{R}e\left\{U+\left[(V_0)_x - j(V_0)_y\right]e^{j\theta}\right\}\int_0^t (t-\tau)\gamma_{(\tau)}d\tau \quad , \tag{69$_2$}$$

et il vient, en tenant compte des relations (48), (49) et (60),

$$\mathcal{X} \sim \pi\rho_0 b\left\{\left(2U\sin\theta_0 - b\frac{d\theta}{dt}\right)(V_0)_y + U\left[2U\sin\theta_0 + 2(V_0)_y - b\frac{d\theta}{dt}\right]\sin\theta\right\} \quad , \tag{70$_1$}$$

$$\mathcal{Y} \sim -\pi\rho_0 b\left\{\left[2U(V_0)_x\sin\theta_0 + b\frac{d(V_0)_y}{dt}\right] + U\left[2U\sin\theta_0 + 2(V_0)_y - b\frac{d\theta}{dt}\right]\cos\theta\right\} \quad , \tag{70$_2$}$$

$$\mathcal{M}_0 \sim -\pi\rho_0 b\left\{b\left[(V_0)_x(V_0)_y - \frac{b^2}{8}\frac{d^2\theta}{dt^2}\right] + U\left[U+(V_0)_x\cos\theta+(V_0)_y\sin\theta\right]\cdot\int_0^t\left[2U\sin\theta_0+2(V_0)_y-b\frac{d\theta}{dt}\right]_{(\tau)}d\tau\right\} \quad . \tag{70$_3$}$$

Par ailleurs, à partir de la définition du mouvement du profil présentée dans le paragraphe 2.1.1.2.1, nous pouvons écrire :

$$(V_o)_x = -U\cos\theta + b\delta\frac{d\theta}{dt} \quad , \tag{71$_1$}$$

$$(V_o)_y = -U\sin\theta + b\frac{d\delta}{dt} + ab\frac{d\theta}{dt} \tag{71$_2$}$$

et les formules (70), donnant, par rapport à O , les coordonnées cartésiennes non nulles approchées du torseur des pressions, s'expriment finalement sous la forme suivante, en fonction des deux degrés de liberté, δ et θ , du système étudié :

$$\mathcal{X} \sim -\pi\rho_o b\left\{\underline{2U^2\sin^2\theta} - \left[2U(\sin\theta_o+\sin\theta) - b\frac{d\theta}{dt}\right]b\left(\frac{d\delta}{dt}+a\frac{d\theta}{dt}\right)\right\} \quad , \tag{72}$$

$$\mathcal{Y} \sim \pi\rho_o b\left[\underline{2U^2\sin\theta\cos\theta} - 2Ub\delta\frac{d\theta}{dt}\sin\theta_o - 2Ub\frac{d\delta}{dt}\cos\theta + 2U(1-a)b\frac{d\theta}{dt}\cos\theta - b^2\left(\frac{d^2\delta}{dt^2}+a\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\right] \quad , \tag{73}$$

$$\mathcal{M}_o \sim -\pi\rho_o b\left\{\underline{U^2\sin\theta\cos\theta} - b\left(U\cos\theta - b\delta\frac{d\theta}{dt}\right)\left(\frac{d\delta}{dt}+a\frac{d\theta}{dt}\right) - Ub\delta\frac{d\theta}{dt}\sin\theta - \frac{1}{8}b^2\frac{d^2\theta}{dt^2} + \right.$$

$$\left. + 2Ub\left[\left(\frac{d\delta}{dt}+a\frac{d\theta}{dt}\right)\sin\theta + \delta\frac{d\theta}{dt}\cos\theta\right]\left[\delta - \left(\frac{1}{2}-a\right)\theta - \mathcal{S}\right]\right\} \quad , \tag{74$_1$}$$

avec :

$$\mathcal{S} = \frac{U}{b}\int_o^t \left(\sin\theta - \sin\theta_o\right)_{(\tau)} d\tau \quad ; \tag{74$_2$}$$

les termes soulignés concernent la force classique de Joukowsky relative à la translation rectiligne et uniforme d'une plaque mince.

Nous avons donc obtenu, comme il était désiré, des expressions différentielles pour les forces aérodynamiques instationnaires non linéaires, dans l'hypothèse simplificatrice de quasi-stationnarité. Avant de les utiliser pour étudier le problème envisagé, nous ferons deux remarques utiles.

2.1.2.2.3.- Remarques.

La première remarque a rapport aux forces instationnaires linéaires pour lesquelles on connaît les expressions rigoureuses correspondantes ; elles doivent donc constituer une condition nécessaire de vérification des expressions approchées précédentes. Dans ce cas, si $\Phi_{(s)}$ désigne la fonction de Wagner, définie par sa transformée de Laplace

$$\mathcal{L}\left\{\Phi_{(s)}\right\} = \frac{K_{1(p)}}{p\left[K_{0(p)} + K_{1(p)}\right]} \quad , \tag{75}$$

$K_{\nu(x)}$ étant la fonction de Bessel modifiée du deuxième genre d'ordre ν , il est bien connu que l'on a :

$$\mathcal{X}_{lin} = 0 \quad , \tag{76$_1$}$$

$$\mathcal{Y}_{lin} = \pi\rho_0 b^2\left[U\frac{d\theta}{dt} - b\left(\frac{d^2\delta}{dt^2} + a\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\right] + 2\pi\rho_0 Ub\left\{U\theta_0\Phi_{\left(\frac{Ut}{b}\right)} + \int_0^{\frac{Ut}{b}}\Phi_{\left(\frac{Ut}{b}-\frac{U\tau}{b}\right)}\cdot\frac{d}{d\tau}\left[U\theta - b\frac{d\delta}{dt} + \left(\frac{1}{2}-a\right)b\frac{d\theta}{dt}\right]_{(\tau)}d\tau\right\} \quad , \tag{76$_2$}$$

$$\mathcal{M}_{o\,lin} = \pi\rho_0 b^3\left(\frac{1}{2}U\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{8}b\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) - \pi\rho_0 Ub^2\left\{U\theta_0\Phi_{\left(\frac{Ut}{b}\right)} + \int_0^{\frac{Ut}{b}}\Phi_{\left(\frac{Ut}{b}-\frac{U\tau}{b}\right)}\cdot\frac{d}{d\tau}\left[U\theta - b\frac{d\delta}{dt} + \left(\frac{1}{2}-a\right)b\frac{d\theta}{dt}\right]_{(\tau)}d\tau\right\} \quad . \tag{76$_3$}$$

Mais, comme $\Phi_{(s)}$ est asymptotiquement équivalente à 1 pour s tendant vers l'infini, l'hypothèse de quasi-stationnarité consiste à remplacer Φ par 1 dans les expressions précédentes qui deviennent alors :

$$\mathcal{X}_{lin} = 0 \quad , \tag{77$_1$}$$

$$\mathcal{Y}_{lin} \sim \pi\rho_o b\left[2U^2\theta - 2Ub\frac{d\delta}{dt} + 2U(1-a)b\frac{d\theta}{dt} - b^2\left(\frac{d^2\delta}{dt^2} + a\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\right] \quad , \tag{77$_2$}$$

$$\mathcal{M}_{o\,lin} \sim -\pi\rho_o b^2\left[U^2\theta - Ub\left(\frac{d\delta}{dt} + a\frac{d\theta}{dt}\right) - \frac{1}{8}b^2\frac{d^2\theta}{dt^2}\right] \quad . \tag{77$_3$}$$

Or, les formules (72) à (74), linéarisées par rapport à δ et θ , donnent bien les mêmes expressions que ci-dessus et la condition nécessaire d'équivalence est vérifiée.

La deuxième remarque a pour but d'introduire les notions de masse et d'inertie du profil induites par le fluide, la connaissance de ces caractéristiques devant être intéressante par la suite pour justifier une simplification qui sera apportée au système différentiel final. Considérons donc le cas théorique où la circulation de la vitesse sur le profil est identiquement nulle dans le temps :

$$\Gamma_o + \int_o^t \gamma(\tau)d\tau \equiv 0 \quad , \tag{78}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \Gamma_o = 0 \quad , & (79) \\ \gamma(t) \equiv 0 \quad . & (80) \end{cases}$$

Le potentiel complexe se réduit alors à sa partie non circulatoire

$$F_{nc}(z,t) = j\frac{b^2}{2}\left[\frac{b^2}{8}\frac{d\theta}{dt}\frac{1}{Z^2} - (V_o)_y\frac{1}{Z}\right] \tag{81}$$

et le torseur des pressions correspondant est déterminé par les expressions exactes suivantes :

$$\left(\mathcal{X}+j\mathcal{Y}\right)_{nc}=-\pi\rho_0 b^2\left[\left(V_0\right)_y\frac{d\theta}{dt}+j\frac{d\left(V_0\right)_y}{dt}\right] \quad , \tag{82$_1$}$$

$$\left(\mathcal{M}_0\right)_{nc}=\pi\rho_0 b^2\left[\frac{b^2}{8}\frac{d^2\theta}{dt^2}-\left(V_0\right)_x\left(V_0\right)_y\right] \quad . \tag{82$_2$}$$

Si, par ailleurs, le mouvement était stationnaire, les formules précédentes se réduiraient à :

$$\left[\left(\mathcal{X}+j\mathcal{Y}\right)_{nc}\right]_{st}=0 \quad , \tag{83$_1$}$$

$$\left[\left(\mathcal{M}_0\right)_{nc}\right]_{st}=-\pi\rho_0 b^2\left(V_0\right)_x\left(V_0\right)_y \quad , \tag{83$_2$}$$

ce qui correspond au cas de l'écoulement à circulation nulle autour du profil animé d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme. Par définition, les forces d'inertie induite par le fluide sont la partie non stationnaire des forces aérodynamiques correspondant à une circulation nulle suivant le profil, c'est-à-dire sont déterminées par :

$$\left(\mathcal{X}+j\mathcal{Y}\right)_i=\left(\mathcal{X}+j\mathcal{Y}\right)_{nc}-\left[\left(\mathcal{X}+j\mathcal{Y}\right)_{nc}\right]_{st} \quad , \tag{84$_1$}$$

$$\left(\mathcal{M}_0\right)_i=\left(\mathcal{M}_0\right)_{nc}-\left[\left(\mathcal{M}_0\right)_{nc}\right]_{st} \quad . \tag{84$_2$}$$

On donne respectivement aux coefficients $\pi\rho_0 b^2$ (qui a les dimensions d'une masse par unité de longueur) et $\frac{1}{8}\pi\rho_0 b^4$ (qui a les dimensions d'un moment d'inertie par unité de longueur) les noms de masse induite par le fluide relativement à $\left(V_0\right)_y$ et de moment d'inertie induit par le fluide relativement à $\frac{d\theta}{dt}$; il est à remarquer que la masse induite par le fluide relativement à $\left(V_0\right)_x$ est évidemment nulle pour un profil infiniment mince puisque, dans un fluide parfait, on peut le déplacer dans une direction parallèle à sa corde sans aucun effort. Par rapport à 0 , les coordonnées

cartésiennes non nulles du torseur des forces d'inertie induites par le fluide ont donc, pour un profil sans épaisseur, les formes suivantes :

$$(X)_i = -\pi\rho_o b^2 (V_o)_y \frac{d\theta}{dt} \quad , \tag{85$_1$}$$

$$(Y)_i = -\pi\rho_o b^2 \frac{d(V_o)_y}{dt} \quad , \tag{85$_2$}$$

$$(\mathcal{M}_o)_i = \frac{1}{8}\pi\rho_o b^4 \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad . \tag{85$_3$}$$

2.2.- Forces d'inertie.

La détermination du torseur dynamique du profil, en mouvement par rapport au repère absolu $(R_1)=(0_1,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$, sera présentée en deux étapes succinctes, l'une relative à la cinématique, l'autre à la cinétique.

2.2.1.- Etude cinématique.

Le champ des accélérations absolues $\vec{J}_{1(P_P)}$ des points P_P liés au profil est donné par la formule classique de Rivals :

$$\frac{d_1^2(\overrightarrow{0_1P_P})}{dt^2} = \vec{J}_{1(P_P)} = \vec{J}_{1(0)} - \frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{z}_1 \wedge \overrightarrow{0P_P} + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \vec{z}_1 \wedge \left(\vec{z}_1 \wedge \overrightarrow{0P_P}\right) \quad . \tag{86}$$

Par ailleurs, d'après la théorie de la composition des mouvements et puisque la vitesse absolue $\vec{V}_o$ de 0 est exprimée sous la forme $(V_o)_x\vec{x}+(V_o)_y\vec{y}$, c'est-à-dire à l'aide de ses composantes $(V_o)_x, (V_o)_y, 0$, dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z}=\vec{z}_1)$ associée aux directions d'axes du repère $(R)=(0,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ lié au profil, il est utile d'introduire la formule suivante de changement de base :

$$\vec{J}_{1(0)} = \frac{d_1\vec{V}_o}{dt} = \frac{d\vec{V}_o}{dt} - \frac{d\theta}{dt}\vec{z} \wedge \vec{V}_o \quad . \tag{87}$$

On obtient alors facilement :

$$\vec{J}_{1(P_P)} = \frac{d\vec{V}_o}{dt} - \frac{d\theta}{dt}\vec{z} \wedge \vec{V}_o - \frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{z} \wedge \overrightarrow{0P_P} + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \vec{z} \wedge \left(\vec{z} \wedge \overrightarrow{0P_P}\right) \quad . \tag{88}$$

Ce vecteur cinématique s'exprime donc par :

$$\vec{J}_{1(P_P)} = \left[\frac{d(V_o)_x}{dt} + (V_o)_y \frac{d\theta}{dt} + y_P \frac{d^2\theta}{dt^2} - x_P\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\vec{x} + \left[\frac{d(V_o)_y}{dt} - (V_o)_x \frac{d\theta}{dt} - x_P \frac{d^2\theta}{dt^2} - y_P\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\vec{y} \quad , \tag{89}$$

si l'on fait intervenir les vecteurs unitaires liés à (R).

Dans le cas particulier qui nous intéresse, c'est-à-dire pour un profil rectiligne infiniment mince $(y_P \equiv 0)$, et en introduisant les variables δ et θ, il vient, à partir des formules (71) :

$$\vec{V}_o = \left(-U\cos\theta + b\delta\frac{d\theta}{dt}\right)\vec{x} + \left(-U\sin\theta + b\frac{d\delta}{dt} + ab\frac{d\theta}{dt}\right)\vec{y} \qquad (71)$$

et, finalement,

$$\vec{J}_{1(P_P)} = \left[2b\frac{d\delta}{dt}\frac{d\theta}{dt} + b\delta\frac{d^2\theta}{dt^2} - (x_P - ab)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\vec{x} + \left[b\frac{d^2\delta}{dt^2} - b\delta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - (x_P - ab)\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\vec{y} \quad . \qquad (90)$$

2.2.2.- Etude cinétique.

Ce paragraphe est le prolongement de l'étude cinématique précédente après introduction de la notion de masse. En effet, on considère qu'en chaque point P_P du profil, supposé rectiligne et sans épaisseur, il existe une densité scalaire de masse par unité de longueur suivant $0x$: $\frac{dm}{dx_P} = m'_{(x_P)}$; la masse M du profil, correspondant à une tranche d'aile d'épaisseur unité, est alors :

$$M = \int_{-b}^{+b} m'_{(x_P)}\, dx_P \quad . \qquad (91)$$

Par ailleurs, le centre d'inertie G est défini par la relation $\vec{OG} = x_G\vec{x}$ telle que :

$$x_G = \frac{1}{M}\int_{-b}^{+b} x_P m'_{(x_P)}\, dx_P \qquad (92)$$

et le moment d'inertie I_{0z} par rapport à l'axe $\vec{0z}$ est déterminé par l'expression :

$$I_{0z} = \int_{-b}^{+b} x_P^2 m'_{(x_P)}\, dx_P \quad . \qquad (93)$$

Les éléments de réduction au point 0 du torseur dynamique du profil, en mouvement par rapport au repère (R_1), sont alors, par définition,

- la résultante dynamique :

$$\vec{J}_1 = \int_{-b}^{+b} \vec{J}_{1(P_P)} m'_{(x_P)}\, dx_P \quad , \qquad (94_1)$$

- le moment dynamique en 0 :

$$\vec{\mathcal{M}}_{1_O} = \int_{-b}^{+b} \vec{OP}_P \wedge \vec{J}_{1_{(P_P)}} m'_{(x_P)} dx_P \quad , \qquad (94_2)$$

le champ d'accélération $\vec{J}_{1_{(P_P)}}$ étant donné par la formule (90). On obtient donc :

$$\vec{J}_1 = Mb\left[2\frac{d\delta}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \delta\frac{d^2\theta}{dt^2} - (\xi_G - a)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\vec{x} + Mb\left[\frac{d^2\delta}{dt^2} - \delta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - (\xi_G - a)\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\vec{y} \qquad (95)$$

et :

$$\vec{\mathcal{M}}_{1_O} = Mb^2\left[\xi_G\frac{d^2\delta}{dt^2} - \xi_G\delta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - (r_o^2 - \xi_G a)\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\vec{z} \quad , \qquad (96)$$

en posant :

$$\xi_G = \frac{x_G}{b} \quad , \qquad (97_1)$$

$$r_o^2 = \frac{I_{Oz}}{Mb^2} \quad , \qquad (97_2)$$

$r_o b$ étant le rayon de giration du profil par rapport à l'axe $\vec{Oz}$. Remarquons que, d'après le théorème de König :

$$\xi_G^2 < r_o^2 \quad .$$

2.3.- Système différentiel.

L'étude du mouvement du profil sera abordée à partir des théorèmes généraux de la dynamique mais, auparavant, il est nécessaire d'introduire les actions extérieures de liaison exercées sur le profil, afin de compléter, en dehors des forces aérodynamiques déterminées au paragraphe 2.1, la définition du torseur des efforts extérieurs agissant sur le profil.

2.3.1.- Forces de liaison.

Le point C du profil étant défini comme le centre élastique des sections droites de l'aile, les éléments de réduction en C_1 du torseur des actions de liaisons auxquelles est soumis le profil ont pour expressions :

$$\vec{\mathcal{R}}_L = R_x \vec{x} + R_{y[\delta]} \vec{y} \quad , \tag{98_1}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{C_1 L} = M_{C_1[\theta]} \vec{z} \quad , \tag{98_2}$$

$R_{y[\delta]}$ et $M_{C_1[\theta]}$ étant des fonctionnelles scalaires respectivement de δ et de θ . Dans l'hypothèse où le comportement interne de l'aile est visco-élastique linéaire, nous pouvons écrire :

$$R_{y[\delta]} = -b\left(K_\delta \delta + f_\delta \frac{d\delta}{dt}\right) \quad , \tag{99_1}$$

$$M_{C_1[\theta]} = K_\theta\left(\theta - \theta_c\right) + f_\theta \frac{d\theta}{dt} \quad , \tag{99_2}$$

K_δ et K_θ étant des coefficients de rigidité, f_δ et f_θ des coefficients d'amortissement visqueux interne et θ_c l'incidence de l'aile rigide (ou angle de calage).

Les relations (98) et (99) donnent alors :

$$\vec{\mathcal{R}}_L = R_x \vec{x} - b\left(K_\delta \delta + f_\delta \frac{d\delta}{dt}\right)\vec{y} \tag{100}$$

et :

$$\vec{\mathcal{M}}_{C_1 L} = \left[K_\theta\left(\theta - \theta_c\right) + f_\theta \frac{d\theta}{dt}\right]\vec{z} \quad . \tag{101}$$

2.3.2.- Equations différentielles.

2.3.2.1.- Mise en équations

La résultante générale et le moment résultant en C_1 du torseur des forces extérieures imposées étant respectivement $\vec{\mathcal{R}}_E$ et $\mathcal{M}_{C_1 E}\vec{z}$, la mise en équations sera effectuée en appliquant les deux théorèmes généraux suivants de la dynamique :

- le théorème de la somme dynamique :

$$\vec{J}_1 = \mathcal{X}\vec{x} + \mathcal{Y}\vec{y} + \vec{\mathcal{R}}_L + \vec{\mathcal{R}}_E \quad , \tag{102}$$

- le théorème du moment dynamique (en C_1) :

$$\vec{\mathcal{N}}_{1C_1} = \vec{\mathcal{M}}_{C_1} + \vec{\mathcal{M}}_{C_1 L} + \mathcal{M}_{C_1 E}\vec{z} \quad , \tag{103}$$

avec les formules de transformation :

$$\vec{\mathcal{N}}_{1_{C_1}} = \vec{\mathcal{N}}_{1_0} - \left[a\left(\vec{\mathcal{J}}_1 \cdot \vec{y}\right) + \delta\left(\vec{\mathcal{J}}_1 \cdot \vec{x}\right)\right] b \vec{z} \quad , \tag{104$_1$}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{C_1} = \left[\mathcal{M}_0 - \left(a\,\mathcal{Y} + \delta\,\mathcal{X}\right) b\right] \vec{z} \quad . \tag{104$_2$}$$

Avant d'utiliser les expressions précédentes, nous introduirons la dernière hypothèse de base relative à cette étude c'est-à-dire que, par la suite, nous négligerons le torseur des forces d'inertie induites par le fluide, introduit au paragraphe 2.1.2.2.3, par rapport au torseur dynamique du profil ; il est à remarquer que cette simplification exige, en particulier, que $\pi \rho_0 b^2$ soit négligeable par rapport à M , ce qui est, en général, physiquement réalisé. En tenant compte des relations (104), nous écrirons donc les équations (102) et (103) sous la forme :

$$\vec{\mathcal{J}}_1 - \vec{\mathcal{R}}_L = \mathcal{X}\vec{x} + \left[\mathcal{Y} - (\mathcal{Y})_i\right]\vec{y} + \vec{\mathcal{R}}_E \quad , \tag{105$_1$}$$

$$\vec{\mathcal{N}}_{1_0} - \left[a\left(\vec{\mathcal{J}}_1 \cdot \vec{y}\right) + \delta\left(\vec{\mathcal{J}}_1 \cdot \vec{x}\right)\right] b \vec{z} - \vec{\mathcal{M}}_{C_{1_L}} = \left[\mathcal{M}_0 - (\mathcal{M}_0)_i\right]\vec{z} - ab\left[\mathcal{Y} - (\mathcal{Y})_i\right]\vec{z} - \delta b\left[\mathcal{X} - (\mathcal{X})_i\right]\vec{z} + \mathcal{M}_{C_{1_E}}\vec{z} \; . \tag{105$_2$}$$

En tirant parti des expressions (73), (74), (85), (95), (96), (100) et (101), nous obtenons alors, dans le cadre de nos hypothèses, le système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$M\left[\frac{d^2\delta}{dt^2} - \left(\xi_G - a\right)\frac{d^2\theta}{dt^2} - \delta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] + K_\delta \delta + f_\delta \frac{d\delta}{dt} =$$

$$= \pi\rho_0\left[2U^2 \sin\theta\cos\theta - 2Ub\frac{d\delta}{dt}\cos\theta + U(1-2a)b\frac{d\theta}{dt}\cos\theta - 2Ub\delta\frac{d\theta}{dt}\sin\theta_0\right] + \frac{1}{b}\mathcal{R}_{E_y} \quad , \tag{106$_1$}$$

$$M\left[\left(r_c^2 + \delta^2\right)\frac{d^2\theta}{dt^2} - \left(\xi_G - a\right)\frac{d^2\delta}{dt^2} + 2\delta\frac{d\delta}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right] + \frac{K_\theta}{b^2}\left(\theta - \theta_c\right) + \frac{f_\theta}{b^2}\frac{d\theta}{dt} =$$

$$= \pi\rho_0\left\{U^2(1+2a)\sin\theta\cos\theta - 2U^2\delta\sin^2\theta - U(1+2a)b\frac{d\delta}{dt}\cos\theta - 2Ua^2b\frac{d\theta}{dt}\cos\theta + 2Ub\delta\frac{d\delta}{dt}\sin\theta_0 + \right.$$

$$\left. + Ub\delta\left[2\frac{d\delta}{dt} - (1-2a)\frac{d\theta}{dt}\right]\sin\theta + 2Ub\left[\left(\frac{d\delta}{dt} + a\frac{d\theta}{dt}\right)\sin\theta + \delta\frac{d\theta}{dt}\cos\theta\right]\left[\delta - \frac{1}{2}(1-2a)\theta - \mathcal{S}\right]\right\} - \frac{1}{b^2}\mathcal{M}_{C_{1_E}} \quad , \tag{106$_2$}$$

$$b\frac{d\mathcal{S}}{dt} = U\left(\sin\theta - \sin\theta_0\right) \quad , \tag{106$_3$}$$

avec les conditions initiales :

$$\delta_{(t=0)} = \frac{\pi \rho_0 U^2}{K_\delta} \sin 2\theta_{(t=0)} \quad , \tag{107$_1$}$$

$$2\theta_{(t=0)} - 2\theta_c = \frac{\pi \rho_0 b^2 U^2}{K_\theta} \left[(1+2a) \sin 2\theta_{(t=0)} - 4\delta_{(t=0)} \sin^2 \theta_{(t=0)} \right] \quad , \quad \theta_0 = \theta_{(t=0)} \quad , \tag{107$_2$}$$

$$\mathcal{S}_{(t=0)} = 0 \quad , \tag{107$_3$}$$

$$\frac{d\delta}{dt}(t=0) = \frac{d\theta}{dt}(t=0) = 0 \tag{107$_4$}$$

et en posant :

$$r_c^2 = \frac{I_{cz'}}{Mb^2} = r_0^2 - 2\xi_G a + a^2 \quad , \tag{108}$$

I_{cz}, et $r_c b$ étant respectivement le moment d'inertie et le rayon de giration du profil par rapport à l'axe $\overrightarrow{Cz'}$ parallèle à l'axe $\overrightarrow{Oz}$. Il est à remarquer que la projection sur $\overrightarrow{Ox}$ de la relation (105$_1$) n'a pas été écrite car elle ne sert pas à déterminer le mouvement ; par contre, le calcul de la force propulsive R_x correspondant à la vitesse U s'effectuerait à partir de l'expression de cette projection.

2.3.2.2.- Système différentiel approché.

2.3.2.2.1.- Généralités.

Les équations (106) du mouvement du système mécanique étudié sont de la forme :

$$\sum_{j=1}^{3} A_{ij}(q_1, q_2, q_3) \ddot{q}_j + F_i(q_1, q_2, q_3; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) = G_i(t) \quad , \tag{109}$$

où $i = 1, 2, 3$ et :

$$q_1 = \delta \quad , \tag{110$_1$}$$

$$q_2 = \theta \quad , \tag{110$_2$}$$

$$q_3 = \mathcal{S} \quad , \tag{110$_3$}$$

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} \quad , \tag{111$_1$}$$

$$\ddot{q}_i = \frac{d^2 q_i}{dt^2} \quad ; \tag{111$_2$}$$

les A_{ij} sont les éléments de la matrice carrée $[A]$ suivante :

$$[A] = \begin{bmatrix} M & (a-\xi_G)M & 0 \\ (a-\xi_G)M & M(r_c^2+\delta^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (112)$$

et

$$G_1 = \frac{1}{b}\mathcal{R}_{Ey} \ , \qquad (113_1)$$

$$G_2 = -\frac{1}{b^2}\mathcal{M}_{O C_1 E} \ , \qquad (113_2)$$

$$G_3 = 0 \ . \qquad (113_3)$$

Considérons le repère relatif $(R_1') = (C_1, \vec{x_1'}, \vec{y_1'}, \vec{z_1'})$ en translation rectiligne uniforme $-U\vec{x_1}$ par rapport à (R_1).
Le profil est en équilibre absolu par rapport au repère (R_1') lorsque les paramètres q_i restent constants au cours du temps avec $G_i \equiv 0$, $q_i = q_{ie}$ étant solution des équations (106) de mouvement, avec les conditions initiales $q_{i(t=0)} = q_{ie}$ et $\dot{q}_{i(t=0)} = 0$. Les positions d'équilibre, si elles existent, sont donc déterminées par les valeurs q_{ie} suivantes des trois paramètres :

$$q_{1e} = \delta_{(t=0)} \ , \qquad (114_1)$$

$$q_{2e} = \theta_{(t=0)} \ , \qquad (114_2)$$

$$q_{3e} = 0 \ , \qquad (114_3)$$

les deux premières valeurs constituant une solution $\delta_{0(\theta_c)}$, $\theta_{0(\theta_c)}$ du système des deux équations (107_1) et (107_2). Par conséquent, une position d'équilibre correspond à $F_{i(\delta_0, \theta_0, 0; 0,0,0)} = 0$, avec $G_i \equiv 0$, dans l'équation (109).

2.3.2.2.2.- Approximation du système différentiel.

Le système développé jusqu'au troisième ordre par rapport aux puissances entières de $(q_n - q_{n_e})$ et $\dot{q}_n$, au voisinage de la position d'équilibre $q_1 = \delta_o$, $q_2 = \theta_o$, $q_3 = 0$, est, par définition, le système des trois équations différentielles ordinaires, non linéaires, du second ordre, à coefficients constants :

$$\sum_{j=1}^{3}\left[A_{ij\,(\delta_o,\theta_o,0)} + \sum_{k=1}^{2}\frac{1}{k!}\left(\left(\sum_{n=1}^{3}\frac{\partial A_{ij}}{\partial q_n}(\delta_o,\theta_o,0)(q_n - q_{n_e})\right)\right)^k\right]\ddot{q}_j +$$

$$+\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{k!}\left(\left(\sum_{n=1}^{3}\left[\frac{\partial F_i}{\partial q_n}(\delta_o,\theta_o,0;0,0,0)(q_n - q_{n_e}) + \frac{\partial F_i}{\partial \dot{q}_n}(\delta_o,\theta_o,0;0,0,0)\dot{q}_n\right]\right)\right)^k = G_{i\,(t)} \quad , \qquad (115)$$

où $i = 1, 2, 3$. En revenant aux notations primitives, on obtient alors :

$$M\frac{d^2\delta}{dt^2} + (a - \xi_G)M\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(f_\delta + 2\pi\rho_o U b\cos\theta_o\right)\frac{d\delta}{dt} - \pi\rho_o U b\left[(1-2a)\cos\theta_o - 2\delta_o\sin\theta_o\right]\frac{d\theta}{dt} + K_\delta(\delta - \delta_o) - 2\pi\rho_o U^2\cos 2\theta_o(\theta - \theta_o) =$$

$$= -\left[2\pi\rho_o U^2\sin 2\theta_o(\theta - \theta_o)^2 - 2\pi\rho_o U b\sin\theta_o(\theta - \theta_o)\frac{d\delta}{dt} + 2\pi\rho_o U b\sin\theta_o(\delta - \delta_o)\frac{d\theta}{dt} + \right.$$

$$\left. + \pi\rho_o U(1-2a)b\sin\theta_o(\theta - \theta_o)\frac{d\theta}{dt} - M\delta_o\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] -$$

$$-\left[\frac{4}{3}\pi\rho_o U^2\cos 2\theta_o(\theta - \theta_o)^3 - \pi\rho_o U b\cos\theta_o(\theta - \theta_o)^2\frac{d\delta}{dt} + \frac{1}{2}\pi\rho_o U(1-2a)b\cos\theta_o(\theta - \theta_o)^2\frac{d\theta}{dt} - \right.$$

$$\left. - M(\delta - \delta_o)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] + \frac{1}{b}\mathcal{R}_{E_y} \quad , \qquad (116_1)$$

$$\left(a-\xi_G\right)M\frac{d^2\delta}{dt^2}+\left[\left(r_c^2+\delta_o^2\right)+2\delta_o\left(\delta-\delta_o\right)+\left(\delta-\delta_o\right)^2\right]M\frac{d^2\theta}{dt^2}+\pi\rho_o Ub\left[\left(1+2a\right)\cos\theta_o-6\delta_o\sin\theta_o+\left(1-2a\right)\theta_o\sin\theta_o\right]\frac{d\delta}{dt}+$$

$$+\left\{\frac{F_\theta}{b^2}+\pi\rho_o Ub\left[2a^2\cos\theta_o-2\delta_o^2\cos\theta_o+\left(1-2a\right)\delta_o\theta_o\cos\theta_o+2\left(1-2a\right)\delta_o\sin\theta_o+\left(1-2a\right)a\theta_o\sin\theta_o\right]\right\}\frac{d\theta}{dt}+$$

$$+2\pi\rho_o U^2\sin^2\theta_o\left(\delta-\delta_o\right)+\left[\frac{K_\theta}{b^2}-\pi\rho_o U^2\left(1+2a\right)\cos2\theta_o+2\pi\rho_o U^2\delta_o\sin2\theta_o\right]\left(\theta-\theta_o\right)=$$

$$=-\left\{2\pi\rho_o U^2\sin2\theta_o\left(\delta-\delta_o\right)\left(\theta-\theta_o\right)+\pi\rho_o U^2\left[2\delta_o\cos2\theta_o+\left(1+2a\right)\sin2\theta_o\right]\left(\theta-\theta_o\right)^2-6\pi\rho_o Ub\sin\theta_o\left(\delta-\delta_o\right)\frac{d\delta}{dt}-\right.$$

$$-\pi\rho_o Ub\left[4\delta_o\cos\theta_o-\left(1-2a\right)\theta_o\cos\theta_o-2\left(1-2a\right)\sin\theta_o\right]\left(\delta-\delta_o\right)\frac{d\theta}{dt}-$$

$$-\pi\rho_o Ub\left[4\delta_o\cos\theta_o-\left(1-2a\right)\theta_o\cos\theta_o+4a\sin\theta_o\right]\left(\theta-\theta_o\right)\frac{d\delta}{dt}+$$

$$+\pi\rho_o Ub\left[3\left(1-2a\right)\delta_o\cos\theta_o+\left(1-2a\right)a\theta_o\cos\theta_o+\left(1-4a\right)a\sin\theta_o+2\delta_o^2\sin\theta_o-\left(1-2a\right)\delta_o\theta_o\sin\theta_o\right]\left(\theta-\theta_o\right)\frac{d\theta}{dt}+$$

$$\left.+2\pi\rho_o Ub\sin\theta_o\,\varphi\frac{d\delta}{dt}+2\pi\rho_o Ub\left(\delta_o\cos\theta_o+a\sin\theta_o\right)\varphi\frac{d\theta}{dt}+\left(2M-\pi\rho_o b^2\right)\delta_o\frac{d\delta}{dt}\frac{d\theta}{dt}-\pi\rho_o ab^2\delta_o\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}-$$

$$-\left\{2\pi\rho_o U^2\cos2\theta_o\left(\delta-\delta_o\right)\left(\theta-\theta_o\right)^2+\frac{2}{3}\pi\rho_o U^2\left[\left(1+2a\right)\cos2\theta_o-2\delta_o\sin\theta_o\right]\left(\theta-\theta_o\right)^3-2\pi\rho_o Ub\cos\theta_o\left(\delta-\delta_o\right)^2\frac{d\theta}{dt}-\right.$$

$$-4\pi\rho_o Ub\cos\theta_o\left(\delta-\delta_o\right)\left(\theta-\theta_o\right)\frac{d\delta}{dt}+\pi\rho_o Ub\left[\frac{1}{2}\left(1-6a\right)\cos\theta_o+2\delta_o\sin\theta_o-\frac{1}{2}\left(1-2a\right)\theta_o\sin\theta_o\right]\left(\theta-\theta_o\right)^2\frac{d\delta}{dt}+$$

$$+\pi\rho_o Ub\left[3\left(1-2a\right)\cos\theta_o+4\delta_o\sin\theta_o-\left(1-2a\right)\theta_o\sin\theta_o\right]\left(\delta-\delta_o\right)\left(\theta-\theta_o\right)\frac{d\theta}{dt}+$$

$$+\pi\rho_o Ub\left[\left(1-3a\right)a\cos\theta_o+\delta_o^2\cos\theta_o-\frac{1}{2}\left(1-2a\right)\delta_o\theta_o\cos\theta_o-2\left(1-2a\right)\delta_o\sin\theta_o-\frac{1}{2}\left(1-2a\right)a\theta_o\sin\theta_o\right]\left(\theta-\theta_o\right)^2\frac{d\theta}{dt}+$$

$$+2\pi\rho_o Ub\cos\theta_o\left(\theta-\theta_o\right)\varphi\frac{d\delta}{dt}+2\pi\rho_o Ub\cos\theta_o\left(\delta-\delta_o\right)\varphi\frac{d\theta}{dt}+\left(2M-\pi\rho_o b^2\right)\left(\delta-\delta_o\right)\frac{d\delta}{dt}\frac{d\theta}{dt}-\pi\rho_o ab^2\left(\delta-\delta_o\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+$$

$$\left.+2\pi\rho_o Ub\left(a\cos\theta_o-\delta_o\sin\theta_o\right)\left(\theta-\theta_o\right)\varphi\frac{d\theta}{dt}\right\}-\frac{1}{b^2}M_{o_{C_{1E}}}\,, \qquad (116_2)$$

$$b\frac{d\varphi}{dt}=U\cos\theta_o\left[\left(\theta-\theta_o\right)-\frac{1}{2}tg\theta_o\left(\theta-\theta_o\right)^2-\frac{1}{6}\left(\theta-\theta_o\right)^3\right]\,. \qquad (116_3)$$

Remarquons que, dans les deux termes en $\frac{d\delta}{dt}\frac{d\theta}{dt}$, il est légitime de négliger $\pi\rho_0 b^2$ par rapport à $2M$ puisque, comme il a déjà été noté, l'hypothèse de négliger les forces d'inertie induites par le fluide, vis-à-vis des forces d'inertie du profil, exige que $\pi\rho_0 b^2$ soit négligeable par rapport à M ; c'est ce que nous ferons donc par la suite.

Malgré toutes les hypothèses simplificatrices introduites depuis le début de cette étude, le système différentiel (116) auquel nous aboutissons, assorti des conditions initiales (107), est encore très compliqué et ne semble pouvoir être traité que dans des cas particuliers. Ce sera l'objet des prochains chapitres.

3.- ANALYSE DU SYSTEME DIFFERENTIEL.

Dans le chapitre précédent, nous avons obtenu un système de trois équations différentielles ordinaires dont les deux premières sont du second ordre alors que la troisième, qui définit le paramètre caché $\mathcal{S}$, n'est que du premier ordre. Compte tenu de sa complication, ce système différentiel ne sera examiné que pour des cas particuliers rendant plus aisée son analyse. Tout d'abord, nous n'étudierons que la manière dont se comporte le système mécanique lorsqu'il est écarté d'une position d'équilibre et abandonné à lui-même c'est-à-dire que nous ne considérerons que les mouvements libres. Par ailleurs, deux types de simplifications peuvent être envisagés pour réduire les termes non linéaires, tout en conservant le caractère de non-linéarité pour le système. Le premier consiste à prendre un angle de calage θ_c non nul et à ne considérer parmi les termes non linéaires que ceux du second ordre ; le deuxième repose sur le cas particulier où l'angle θ_c est nul, ce qui fait disparaître les termes du second ordre et ne laisse donc subsister parmi les termes non linéaires que ceux du troisième ordre. Nous avons choisi cette dernière circonstance car elle simplifie aussi les termes linéaires, au contraire de la première.

Dans le cadre de ce qui vient d'être présenté, nous allons d'abord transformer le système différentiel (116) en un système différentiel du premier ordre à cinq variables. Nous passerons alors au problème principal c'est-à-dire à l'étude de la stabilité de l'équilibre au voisinage d'une vitesse critique de flottement.

3.1.- Généralités.

3.1.1.- Forme canonique.

Afin de rendre les expressions sans dimension dans tout ce qui suit, nous poserons :

$$s = \frac{Ut}{b} \quad , \tag{117$_1$}$$

$$m = \frac{M}{\pi \rho_o b^2} \gg 1 \quad , \tag{117$_2$}$$

$$\omega_\delta = \sqrt{\frac{K_\delta}{M}} \quad , \tag{117$_3$}$$

$$\omega_\theta = \frac{1}{r_c b}\sqrt{\frac{K_\theta}{M}} \quad , \tag{117$_4$}$$

$$\varpi = \frac{1}{r_c b}\sqrt{\frac{K_\theta}{K_\delta}} = \frac{\omega_\theta}{\omega_\delta} \quad , \tag{117$_5$}$$

$$u = \frac{U}{b}\sqrt{\frac{M}{K_\delta}} = \frac{U}{\omega_\delta b} \quad , \tag{117$_6$}$$

$$\varepsilon_\delta = \frac{f_\delta}{2\sqrt{K_\delta M}} \quad , \tag{117$_7$}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{f_\theta}{2 r_c b \sqrt{K_\theta M}} \quad . \tag{117$_8$}$$

Dans ces conditions, avec, comme il a été dit précédemment :

$$\mathcal{R}_{E_y} = 0 \quad , \tag{118$_1$}$$

$$\mathcal{M}_{C_{1_E}} = 0 \quad , \tag{118$_2$}$$

$$\theta_c = 0 \quad , \tag{119}$$

d'où :

$$\delta_o = \theta_o = 0 \quad , \tag{120}$$

et en tenant compte de l'inégalité (117$_2$), le système différentiel (116) s'écrit :

$$\frac{d^2\delta}{ds^2}+\left(a-\xi_G\right)\frac{d^2\theta}{ds^2}+2\left(\frac{1}{m}+\frac{\varepsilon_\delta}{u}\right)\frac{d\delta}{ds}-\frac{1-2a}{m}\frac{d\theta}{ds}+\frac{1}{u^2}\delta-\frac{2}{m}\theta=-\frac{4}{3m}\theta^3+\frac{1}{m}\theta^2\frac{d\delta}{ds}-\frac{1-2a}{2m}\theta^2\frac{d\theta}{ds}+\delta\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2, \quad (121_1)$$

$$\left(a-\xi_G\right)\frac{d^2\delta}{ds^2}+\left(r_c^2+\delta^2\right)\frac{d^2\theta}{ds^2}+\frac{1+2a}{m}\frac{d\delta}{ds}+2\left(\frac{a^2}{m}+\varpi r_c^2\frac{\varepsilon_\theta}{u}\right)\frac{d\theta}{ds}+\left(\frac{\varpi^2 r_c^2}{u^2}-\frac{1+2a}{m}\right)\theta=$$

$$=-\frac{2}{m}\delta\theta^2-2\frac{1+2a}{3m}\theta^3+\frac{2}{m}\delta^2\frac{d\theta}{ds}+\frac{4}{m}\delta\theta\frac{d\delta}{ds}-\frac{1-6a}{2m}\theta^2\frac{d\delta}{ds}-3\frac{1-2a}{m}\delta\theta\frac{d\theta}{ds}-\frac{(1-3a)a}{m}\theta^2\frac{d\theta}{ds}-$$

$$-\frac{2}{m}\theta\mathcal{S}\frac{d\delta}{ds}-\frac{2}{m}\delta\mathcal{S}\frac{d\theta}{ds}-2\delta\frac{d\delta}{ds}\frac{d\theta}{ds}-\frac{2a}{m}\theta\mathcal{S}\frac{d\theta}{ds}+\frac{a}{m}\delta\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 , \quad (121_2)$$

$$\frac{d\mathcal{S}}{ds}=\theta-\frac{1}{6}\theta^3 . \quad (121_3)$$

Les deux premières équations différentielles du système précédent se présentent sous la forme :

$$\frac{d^2\delta}{ds^2}+\left(a-\xi_G\right)\frac{d^2\theta}{ds^2}+F_\delta^{(1)}=F_\delta^{(3)} , \quad (122_1)$$

$$\left(a-\xi_G\right)\frac{d^2\delta}{ds^2}+r_c^2\left(1+\frac{\delta^2}{r_c^2}\right)\frac{d^2\theta}{ds^2}+F_\theta^{(1)}=F_\theta^{(3)} , \quad (122_2)$$

où $F^{(1)}$ et $F^{(3)}$ sont des polynômes entiers homogènes, respectivement du premier et du troisième degré par rapport à l'ensemble des variables δ , θ , $\mathcal{S}$, $\frac{d\delta}{ds}$ et $\frac{d\theta}{ds}$, ces variables étant considérées comme des infiniments petits principaux (cf. § 2.3.2.2.2).

L'élimination de $\frac{d^2\delta}{ds^2}$ entre les deux équations (122) donne :

$$\left[r_c^2-\left(a-\xi_G\right)^2\right]\frac{d^2\theta}{ds^2}+\frac{1}{1+\frac{\delta^2}{r_c^2-\left(a-\xi_G\right)^2}}\left[F_\theta^{(1)}-\left(a-\xi_G\right)F_\delta^{(1)}\right]=\frac{1}{1+\frac{\delta^2}{r_c^2-\left(a-\xi_G\right)^2}}\left[F_\theta^{(3)}-\left(a-\xi_G\right)F_\delta^{(3)}\right] . \quad (123)$$

En multipliant l'équation (122_1) par $(a-\xi_G)$ et en ajoutant membre à membre l'équation résultante à l'équation (123), on obtient :

$$\left(a-\xi_G\right)\frac{d^2\delta}{ds^2}+r_c^2\frac{d^2\theta}{ds^2}+\left\{\frac{1}{1+\dfrac{\delta^2}{r_c^2-\left(a-\xi_G\right)^2}}\left[F_\theta^{(1)}-\left(a-\xi_G\right)F_\delta^{(1)}\right]+\left(a-\xi_G\right)F_\delta^{(1)}\right\}=$$

$$=\left\{\frac{1}{1+\dfrac{\delta^2}{r_c^2-\left(a-\xi_G\right)^2}}\left[F_\theta^{(3)}-\left(a-\xi_G\right)F_\delta^{(3)}\right]+\left(a-\xi_G\right)F_\delta^{(3)}\right\} \quad . \quad (124)$$

Les développements limités des termes entre accolades de l'équation précédente jusqu'au troisième ordre par rapport aux puissances entières de δ , θ , $\frac{d\delta}{ds}$, $\frac{d\theta}{ds}$ et $\mathcal{S}$ permettent alors de remplacer le système différentiel (122) par le système différentiel suivant, équivalent jusqu'au troisième ordre :

$$\frac{d^2\delta}{ds^2}+\left(a-\xi_G\right)\frac{d^2\theta}{ds^2}+F_\delta^{(1)}=F_\delta^{(3)} \quad , \quad (125_1)$$

$$\left(a-\xi_G\right)\frac{d^2\delta}{ds^2}+r_c^2\frac{d^2\theta}{ds^2}+F_\theta^{(1)}=F_\theta^{(3)}+\frac{1}{r_c^2-\left(a-\xi_G\right)^2}\delta^2\left[F_\theta^{(1)}-\left(a-\xi_G\right)F_\delta^{(1)}\right] \quad . \quad (125_2)$$

Par ailleurs, l'expression de $F_\theta^{(3)}$ se présente sous la forme :

$$F_\theta^{(3)}=\Phi_\theta^{(2)}.\mathcal{S}+\Phi_\theta^{(3)} \quad , \quad (126)$$

où $\Phi_\theta^{(2)}$ et $\Phi_\theta^{(3)}$ sont des polynômes entiers homogènes, respectivement du second et du troisième degré par rapport à l'ensemble des variables δ , θ , $\frac{d\delta}{ds}$ et $\frac{d\theta}{ds}$. Comme ces variables, ainsi que $\mathcal{S}$, sont considérées comme des infiniments petits principaux, il suffit, pour étudier le système différentiel (121) approché au troisième ordre, de remplacer, dans la relation (126), la variable $\mathcal{S}$ par l'approximation $\mathcal{S}^{(1)}$ donnée par

$$\frac{d\mathcal{S}^{(1)}}{ds}=\theta \quad (127)$$

qui prend alors la place de l'équation différentielle (121_3) dans le cas particulier retenu.

Dans ces conditions, le mouvement libre du profil peut être déterminé par le système différentiel non linéaire suivant :

$$\frac{d^2\delta}{ds^2}+\left(a-\xi_G\right)\frac{d^2\theta}{ds^2}+2\left(\frac{1}{m}+\frac{\varepsilon_\delta}{u}\right)\frac{d\delta}{ds}-\frac{1-2a}{m}\frac{d\theta}{ds}+\frac{1}{u^2}\delta-\frac{2}{m}\theta=-\frac{4}{3m}\theta^3+\frac{1}{m}\theta^2\frac{d\delta}{ds}-\frac{1-2a}{2m}\theta^2\frac{d\theta}{ds}+\delta\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 \quad , \tag{128$_1$}$$

$$\frac{a-\xi_G}{r_c^2}\frac{d^2\delta}{ds^2}+\frac{d^2\theta}{ds^2}+\frac{1+2a}{mr_c^2}\frac{d\delta}{ds}+2\left(\frac{a^2}{mr_c^2}+\varpi\frac{\varepsilon_\theta}{u}\right)\frac{d\theta}{ds}+\left(\frac{\varpi^2}{u^2}-\frac{1+2a}{mr_c^2}\right)\theta=$$

$$=-\frac{a-\xi_G}{\left[r_c^2-\left(a-\xi_G\right)^2\right]r_c^2u^2}\delta^3+\frac{1}{r_c^2-\left(a-\xi_G\right)^2}\left(\frac{\varpi^2}{u^2}-\frac{1+2\xi_G}{mr_c^2}\right)\delta^2\theta-\frac{2}{mr_c^2}\delta\theta^2-\frac{1}{r_c^2-\left(a-\xi_G\right)^2}\left[\frac{2\left(a-\xi_G\right)}{r_c^2}\frac{\varepsilon_\delta}{u}-\frac{1+2\xi_G}{mr_c^2}\right]\delta^2\frac{d\delta}{ds}-$$

$$-\frac{2\left(1+2a\right)}{3mr_c^2}\theta^3+\frac{1}{r_c^2-\left(a-\xi_G\right)^2}\left(\frac{a-\xi_G-2a^2+6a\xi_G-2\xi_G^2+2r_c^2}{mr_c^2}+2\varpi\frac{\varepsilon_\theta}{u}\right)\delta^2\frac{d\theta}{ds}+\frac{4}{mr_c^2}\delta\theta\frac{d\delta}{ds}-$$

$$-\frac{1-6a}{2mr_c^2}\theta^2\frac{d\delta}{ds}-\frac{3\left(1-2a\right)}{mr_c^2}\delta\theta\frac{d\theta}{ds}-\frac{\left(1-3a\right)a}{mr_c^2}\theta^2\frac{d\theta}{ds}-\frac{2}{mr_c^2}\theta\varphi^{(1)}\frac{d\delta}{ds}-\frac{2}{mr_c^2}\delta\varphi^{(1)}\frac{d\theta}{ds}-\frac{2}{r_c^2}\delta\frac{d\delta}{ds}\frac{d\theta}{ds}-$$

$$-\frac{2a}{mr_c^2}\theta\varphi^{(1)}\frac{d\theta}{ds}+\frac{a}{mr_c^2}\delta\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 \quad , \tag{128$_2$}$$

$$\frac{d\varphi^{(1)}}{ds}=\theta \quad . \tag{128$_3$}$$

Le temps t , par l'intermédiaire de la variable indépendante sans dimension s , ne figurant pas de façon explicite dans les équations précédentes mais, au contraire, ne s'y trouvant que par les dérivées temporelles des variables δ , θ et $\varphi^{(1)}$, l'étude portera donc sur un système autonome du second ordre à trois variables.

Nous allons d'abord ramener le système d'équations différentielles (128) à un système du premier ordre, par introduction d'inconnues auxiliaires. Il suffit en effet de poser :

$$w_1=\frac{d\delta}{ds} \quad , \tag{129$_1$}$$

$$w_2=\frac{d\theta}{ds} \quad , \tag{129$_2$}$$

$$w_3=\delta \quad , \tag{129$_3$}$$

$$w_4=\theta \quad , \tag{129$_4$}$$

$$w_5=\varphi^{(1)} \tag{129$_5$}$$

et le système (128) équivaut au système du premier ordre :

$$\frac{dw_1}{ds}+\left(a-\xi_G\right)\frac{dw_2}{ds}+2\left(\frac{1}{m}+\frac{\varepsilon_\delta}{u}\right)w_1-\frac{1-2a}{m}w_2+\frac{1}{u^2}w_3-\frac{2}{m}w_4=w_2^2w_3+\frac{1}{m}w_1w_4^2-\frac{1-2a}{2m}w_2w_4^2-\frac{4}{3m}w_4^3 \quad , \qquad (130_1)$$

$$\frac{a-\xi_G}{r_c^2}\frac{dw_1}{ds}+\frac{dw_2}{ds}+\frac{1+2a}{mr_c^2}w_1+2\left(\frac{a^2}{mr_c^2}+\varpi\frac{\varepsilon_\theta}{u}\right)w_2+\left(\frac{\varpi^2}{u^2}-\frac{1+2a}{mr_c^2}\right)w_4=$$

$$=-\frac{2}{r_c^2}w_1w_2w_3-\frac{1}{r_c^2-\left(a-\xi_G\right)^2}\left[\frac{2\left(a-\xi_G\right)}{r_c^2}\frac{\varepsilon_\delta}{u}-\frac{1+2\xi_G}{mr_c^2}\right]w_1w_3^2+\frac{a}{mr_c^2}w_2^2w_3+\frac{4}{mr_c^2}w_1w_3w_4+$$

$$+\frac{1}{r_c^2-\left(a-\xi_G\right)^2}\left(\frac{a-\xi_G-2a^2+6a\xi_G-2\xi_G^2+2r_c^2}{mr_c^2}+2\varpi\frac{\varepsilon_\theta}{u}\right)w_2w_3^2-\frac{a-\xi_G}{\left[r_c^2-\left(a-\xi_G\right)^2\right]r_c^2u^2}w_3^3-\frac{1-6a}{2mr_c^2}w_1w_4^2-$$

$$-\frac{3\left(1-2a\right)}{mr_c^2}w_2w_3w_4+\frac{1}{r_c^2-\left(a-\xi_G\right)^2}\left(\frac{\varpi^2}{u^2}-\frac{1+2\xi_G}{mr_c^2}\right)w_3^2w_4-\frac{\left(1-3a\right)a}{mr_c^2}w_2w_4^2-\frac{2}{mr_c^2}w_1w_4w_5-$$

$$-\frac{2}{mr_c^2}w_2w_3w_5-\frac{2}{mr_c^2}w_3w_4^2-\frac{2a}{mr_c^2}w_2w_4w_5-\frac{2\left(1+2a\right)}{3mr_c^2}w_4^3 \quad , \qquad (130_2)$$

$$\frac{dw_3}{ds}=w_1 \quad , \qquad (130_3)$$

$$\frac{dw_4}{ds}=w_2 \quad , \qquad (130_4)$$

$$\frac{dw_5}{ds}=w_4 \quad , \qquad (130_5)$$

de 5 équations différentielles à 5 fonctions inconnues numériques de la variable numérique s . Ce système peut être résolu par rapport aux variables $\frac{dw_i}{ds}$ $\left(i=1,\ldots,5\right)$, ce qui est possible puisque, $I_{Gz''}$ étant le moment d'inertie du profil par rapport à l'axe $\overrightarrow{Gz''}$ parallèle à l'axe $\overrightarrow{Oz}$, nous avons physiquement :

$$r_c^2-\left(a-\xi_G\right)^2=\frac{I_{Gz''}}{Mb^2}\neq 0 \quad ; \qquad (131)$$

finalement, nous n'aurons à considérer que le système différentiel de la forme particulière suivante :

$$\frac{dw_1}{ds}=\left\{-\frac{1}{r_c^2-(a-\xi_G)^2}\left[\frac{2r_c^2-(a-\xi_G)(1+2a)}{m}+2r_c^2\frac{\varepsilon_\delta}{u}\right]w_1+\frac{1}{r_c^2-(a-\xi_G)^2}\left[\frac{(1-2a)r_c^2+2(a-\xi_G)a^2}{m}+(a-\xi_G)\varpi r_c^2\frac{\varepsilon_\theta}{u}\right]w_2-\right.$$
$$\left.-\frac{r_c^2}{r_c^2-(a-\xi_G)^2}\frac{1}{u^2}w_3+\frac{1}{r_c^2-(a-\xi_G)^2}\left[\frac{2r_c^2-(a-\xi_G)(1+2a)}{m}+(a-\xi_G)\frac{\varpi^2r_c^2}{u^2}\right]w_4\right\}+$$
$$+\left\{\frac{2(a-\xi_G)}{r_c^2-(a-\xi_G)^2}w_1w_2w_3-\frac{a-\xi_G}{\left[r_c^2-(a-\xi_G)^2\right]^2}\left[\frac{1+2\xi_G}{m}-2(a-\xi_G)\frac{\varepsilon_\delta}{u}\right]w_1w_3^2+\frac{1}{r_c^2-(a-\xi_G)^2}\left[r_c^2-\frac{(a-\xi_G)a}{m}\right]w_2^2w_3-\right.$$
$$-\frac{4(a-\xi_G)}{\left[r_c^2-(a-\xi_G)^2\right]m}w_1w_3w_4-\frac{a-\xi_G}{\left[r_c^2-(a-\xi_G)^2\right]^2}\left(\frac{a-\xi_G-2a^2+6a\xi_G-2\xi_G^2+2r_c^2}{m}+2\varpi r_c^2\frac{\varepsilon_\theta}{u}\right)w_2w_3^2+$$
$$+\frac{(a-\xi_G)^2}{\left[r_c^2-(a-\xi_G)^2\right]^2u^2}w_3^3+\frac{2r_c^2+(a-\xi_G)(1-6a)}{2\left[r_c^2-(a-\xi_G)^2\right]m}w_1w_4^2+\frac{3(a-\xi_G)(1-2a)}{\left[r_c^2-(a-\xi_G)^2\right]m}w_2w_3w_4-$$
$$-\frac{a-\xi_G}{\left[r_c^2-(a-\xi_G)^2\right]^2}\left(\frac{\varpi^2r_c^2}{u^2}-\frac{1+2\xi_G}{m}\right)w_3^2w_4-\frac{(1-2a)r_c^2-2(a-\xi_G)(1-3a)a}{2\left[r_c^2-(a-\xi_G)^2\right]m}w_2w_4^2+\frac{2(a-\xi_G)}{\left[r_c^2-(a-\xi_G)^2\right]m}w_1w_4w_5+$$
$$\left.+\frac{2(a-\xi_G)}{\left[r_c^2-(a-\xi_G)^2\right]m}w_2w_3w_5+\frac{2(a-\xi_G)}{\left[r_c^2-(a-\xi_G)^2\right]m}w_3w_4^2+\frac{2(a-\xi_G)a}{\left[r_c^2-(a-\xi_G)^2\right]m}w_2w_4w_5-\frac{4r_c^2-2(a-\xi_G)(1+2a)}{3\left[r_c^2-(a-\xi_G)^2\right]m}w_4^3\right\},\qquad(132_1)$$

$$\frac{dw_2}{ds}=\left\{-\frac{1}{r_c^2-(a-\xi_G)^2}\left[\frac{(1+2a)-2(a-\xi_G)}{m}-2(a-\xi_G)\frac{\varepsilon_\delta}{u}\right]w_1-\frac{1}{r_c^2-(a-\xi_G)^2}\left[\frac{2a^2+(a-\xi_G)(1-2a)}{m}+2\varpi r_c^2\frac{\varepsilon_\theta}{u}\right]w_2+\right.$$
$$\left.+\frac{a-\xi_G}{r_c^2-(a-\xi_G)^2}\frac{1}{u^2}w_3+\frac{1}{r_c^2-(a-\xi_G)^2}\left[\frac{(1+2a)-2(a-\xi_G)}{m}-\frac{\varpi^2r_c^2}{u^2}\right]w_4\right\}+$$
$$+\left\{-\frac{2}{r_c^2-(a-\xi_G)^2}w_1w_2w_3+\frac{1}{\left[r_c^2-(a-\xi_G)^2\right]^2}\left[\frac{1+2\xi_G}{m}-2(a-\xi_G)\frac{\varepsilon_\delta}{u}\right]w_1w_3^2+\frac{1}{r_c^2-(a-\xi_G)^2}\left[\frac{a}{m}-(a-\xi_G)\right]w_2^2w_3+\right.$$
$$+\frac{4}{\left[r_c^2-(a-\xi_G)^2\right]m}w_1w_3w_4+\frac{1}{\left[r_c^2-(a-\xi_G)^2\right]^2}\left(\frac{a-\xi_G-2a^2+6a\xi_G-2\xi_G^2+2r_c^2}{m}+2\varpi r_c^2\frac{\varepsilon_\theta}{u}\right)w_2w_3^2-$$
$$-\frac{a-\xi_G}{\left[r_c^2-(a-\xi_G)^2\right]^2u^2}w_3^3-\frac{(1-6a)+2(a-\xi_G)}{2\left[r_c^2-(a-\xi_G)^2\right]m}w_1w_4^2-\frac{3(1-2a)}{\left[r_c^2-(a-\xi_G)^2\right]m}w_2w_3w_4+$$
$$+\frac{1}{\left[r_c^2-(a-\xi_G)^2\right]^2}\left(\frac{\varpi^2r_c^2}{u^2}-\frac{1+2\xi_G}{m}\right)w_3^2w_4-\frac{2(1-3a)a-(a-\xi_G)(1-2a)}{2\left[r_c^2-(a-\xi_G)^2\right]m}w_2w_4^2-\frac{2}{\left[r_c^2-(a-\xi_G)^2\right]m}w_1w_4w_5-$$
$$\left.-\frac{2}{\left[r_c^2-(a-\xi_G)^2\right]m}w_2w_3w_5-\frac{2}{\left[r_c^2-(a-\xi_G)^2\right]m}w_3w_4^2-\frac{2a}{\left[r_c^2-(a-\xi_G)^2\right]m}w_2w_4w_5-\frac{2(1+2a)-4(a-\xi_G)}{3\left[r_c^2-(a-\xi_G)^2\right]m}w_4^3\right\},\qquad(132_2)$$

$$\frac{dw_3}{ds}=w_1\,,\qquad(132_3)$$

$$\frac{dw_4}{ds}=w_2\,,\qquad(132_4)$$

$$\frac{dw_5}{ds}=w_4\,.\qquad(132_5)$$

3.1.2.- Problème de Cauchy, solutions stationnaires.

L'intégration du système d'équations différentielles à coefficients constants précédent, c'est-à-dire l'expression, au moyen de fonctions connues, de la solution la plus générale du système, ne semble pas possible. Aussi, à défaut d'une intégration effective, il est essentiel de pouvoir affirmer l'existence et l'unicité des solutions ; nous allons donc envisager le problème aux limites suivant.

Etant donné le système différentiel (132) dans le champ réel, nous considérerons le problème de Cauchy associé qui consiste à chercher les solutions de ce système qui prennent des valeurs données, soit $w_{i\,(s_0)} = w_{0i}$ $(i = 1, \ldots, 5)$, pour une valeur donnée s_0 de la variable réelle s. Pour le système mécanique étudié, les données de Cauchy correspondent à la donnée des valeurs $\delta_{(t_0)}$, $\theta_{(t_0)}$, $\varphi^{(1)}_{(t_0)}$ et $\frac{d\delta}{dt}(t_0)$, $\frac{d\theta}{dt}(t_0)$ c'est-à-dire que la donnée de la position initiale et des vitesses initiales conduit à un problème de Cauchy.

Or, les seconds membres des équations différentielles (132) sont des fonctions analytiques des variables w_i $(i = 1, \ldots, 5)$ et on peut affirmer l'existence d'une solution unique pour le problème de Cauchy ainsi posé ; en particulier, le mouvement du système mécanique considéré est déterminé par la connaissance de sa position $\delta_{(0)} = \delta_0$, $\theta_{(0)} = \theta_0$, $\varphi^{(1)}_{(0)} = 0$ et des vitesses de ses paramètres $\frac{d\delta}{dt}(0) = \dot{\delta}_0$, $\frac{d\theta}{dt}(0) = \dot{\theta}_0$ à l'instant initial $t_0 = 0^+$.

Remarquons qu'il y a lieu de considérer particulièrement les points w_{ej} $(j = 1, \ldots, 5)$ pour lesquels les seconds membres des équations différentielles (132) s'annulent simultanément. En de tels points singuliers (ou : critiques) du système, il est clair que $w_i = w_{ei}$ $(i = 1, \ldots, 5)$ sont solutions du système différentiel (132) :

$$\frac{dw_i}{ds} = \frac{dw_{ei}}{ds} = 0 \quad , \tag{133}$$

c'est-à-dire que les paramètres w_i repérant la position du système matériel restent constants au cours du temps avec les conditions initiales $w_{0i} = w_{ei}$. Les points singuliers sont donc les positions d'équilibre du système. Dans le cas étudié, ces points critiques sont les solutions du système d'équations algébriques suivant :

$$-\frac{r_c^2}{\left[r_c^2-\left(a-\xi_G\right)^2\right]u^2}w_3+\frac{\left(a-\xi_G\right)^2}{\left[r_c^2-\left(a-\xi_G\right)^2\right]^2u^2}w_3^3=0 \quad , \tag{134$_1$}$$

$$\frac{a-\xi_G}{\left[r_c^2-\left(a-\xi_G\right)^2\right]u^2}w_3-\frac{a-\xi_G}{\left[r_c^2-\left(a-\xi_G\right)^2\right]^2u^2}w_3^3=0 \quad , \tag{134$_2$}$$

$$w_1=0 \quad , \tag{134$_3$}$$

$$w_2=0 \quad , \tag{134$_4$}$$

$$w_4=0 \quad , \tag{134$_5$}$$

avec :

$$r_c^2-\left(a-\xi_G\right)^2\neq 0 \tag{131}$$

et, par définition,

$$w_{e_5}=0 \tag{135}$$

(nous supposons implicitement, dans cette étude, que $u\neq 0$). Quelle que soit la valeur de $(a-\xi_G)$, le problème posé admet la solution unique simple ci-après :

$$w_{e_j}=0 \qquad (j=1,\ldots,5) \tag{136}$$

et les seules solutions stationnaires du système différentiel (132) sont données par :

$$w_i=0 \qquad (i=1,\ldots,5) \quad . \tag{137}$$

La question particulière qui reste posée est de savoir ce que l'on peut dire d'une solution dont les valeurs initiales w_{o_i} (i = 1, ..., 4) sont petites et $w_{o_5}=0$, c'est-à-dire de savoir si elle va s'écarter notablement ou non de la solution d'équilibre $w_i=0$, et cela va nous amener à préciser le concept de stabilité retenu.

3.1.3.- Stabilité.

Il existe plusieurs définitions de la stabilité du mouvement non troublé d'un système mécanique mais, dans ce qui suit, nous adopterons la définition de Ljapunov qui est la plus généralement admise et qui concerne l'écart entre une solution déterminée et les solutions voisines.

Plus précisément, une solution $w_{i(s)}$ ($i = 1, \ldots, 5$) du système différentiel (132) $\frac{dw_i}{ds} = \Phi_{i(w_1,\ldots,w_5)}$, définie pour tout $s \geqslant 0$, sera dite stable par rapport aux w_l ($l = 1, \ldots, 4$) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta = \eta_{(\varepsilon)} > 0$ tel que toute autre solution $w'_{i(s)}$, définie pour $s \geqslant 0$ et vérifiant $\left\| w'_{i(0)} - w_{i(0)} \right\| \leqslant \eta$, satisfait à $\left\| w'_{l(s)} - w_{l(s)} \right\| \leqslant \varepsilon$ pour $s \geqslant 0$. Si, de plus, $w'_{l(s)} - w_{l(s)} \to 0$ quand $s \to \infty$, on dira que la solution non troublée $w_{i(s)}$ est asymptotiquement stable par rapport aux .

Sachant que l'étude du système linéarisé au voisinage de la position d'équilibre $w_i = 0$ ($i = 1, \ldots, 5$) suffit dans bien des cas, mais non pas dans tous, à reconnaître si cette position d'équilibre est ou non stable par rapport aux w_i , et donc par rapport aux w_l ($l = 1, \ldots, 4$), nous commencerons par cette recherche de stabilité locale.

3.2.- Système linéarisé.

Par définition, le système linéarisé au voisinage de la position d'équilibre $w_i = 0$ ($i = 1, \ldots, 5$) est le système des 5 équations différentielles, linéaires, du premier ordre, à coefficients constants :

$$\frac{dw_1}{ds} = -\frac{1}{r_c^2-(a-\xi_G)^2}\left[\frac{2r_c^2-(a-\xi_G)(1+2a)}{m}+2r_c^2\frac{\varepsilon_\delta}{u}\right]w_1+\frac{1}{r_c^2-(a-\xi_G)^2}\left[\frac{(1-2a)r_c^2+2(a-\xi_G)a^2}{m}+(a-\xi_G)\varpi r_c^2\frac{\varepsilon_\theta}{u}\right]w_2-$$

$$-\frac{r_c^2}{r_c^2-(a-\xi_G)^2}\frac{1}{u^2}w_3+\frac{1}{r_c^2-(a-\xi_G)^2}\left[\frac{2r_c^2-(a-\xi_G)(1+2a)}{m}+(a-\xi_G)\frac{\varpi r_c^2}{u^2}\right]w_4 \quad , \qquad (138_1)$$

$$\frac{dw_2}{ds} = -\frac{1}{r_c^2-(a-\xi_G)^2}\left[\frac{(1+2a)-2(a-\xi_G)}{m}-2(a-\xi_G)\frac{\varepsilon_\delta}{u}\right]w_1-\frac{1}{r_c^2-(a-\xi_G)^2}\left[\frac{2a^2+(a-\xi_G)(1-2a)}{m}+2\varpi^2 r_c^2\frac{\varepsilon_\theta}{u}\right]w_2+$$

$$+\frac{a-\xi_G}{r_c^2-(a-\xi_G)^2}\frac{1}{u^2}w_3+\frac{1}{r_c^2-(a-\xi_G)^2}\left[\frac{(1+2a)-2(a-\xi_G)}{m}-\frac{\varpi^2 r_c^2}{u^2}\right]w_4 \quad , \qquad (138_2)$$

$$\frac{dw_3}{ds} = w_1 \quad , \tag{138$_3$}$$

$$\frac{dw_4}{ds} = w_2 \quad , \tag{138$_4$}$$

$$\frac{dw_5}{ds} = w_4 \quad , \tag{138$_5$}$$

avec $u \neq 0$ et

$$w_{5(0)} = 0 \quad . \tag{139}$$

3.2.1.- Equation caractéristique et vecteurs propres.

D'après la théorie des équations différentielles à coefficients constants, le système linéarisé homogène précédent possède des solutions particulières de la forme $w_i = A_i e^{\lambda s}$ où λ et les A_i sont inconnus. Si ces valeurs des w_i sont reportées dans le système linéarisé (138), celui-ci se présente comme un système de 5 équations linéaires et homogènes par rapport aux 5 inconnues A_i. Ce système n'admet de solution autre que zéro, pour tous les les A_i, que si le déterminant des coefficients des inconnues est nul :

$$\begin{vmatrix}
\lambda + \frac{1}{r_G^2}\left[\frac{2r_c^2 - (\partial - \xi_G)(1+2\partial)}{m} + 2r_c^2\frac{\varepsilon_\delta}{u}\right] & -\frac{1}{r_G^2}\left[\frac{(1-2\partial)r_c^2 + 2(\partial-\xi_G)\partial^2}{m} + (\partial-\xi_G)\varpi r_c^2\frac{\varepsilon_\theta}{u}\right] & \frac{r_c^2}{r_G^2}\frac{1}{u^2} & -\frac{1}{r_G^2}\left[\frac{2r_c^2 - (\partial-\xi_G)(1+2\partial)}{m} + (\partial-\xi_G)\frac{\varpi^2 r_c^2}{u^2}\right] & 0 \\
\frac{1}{r_G^2}\left[\frac{(1+2\partial) - 2(\partial-\xi_G)}{m} - 2(\partial-\xi_G)\frac{\varepsilon_\delta}{u}\right] & \lambda + \frac{1}{r_G^2}\left[\frac{2\partial^2 + (\partial-\xi_G)(1-2\partial)}{m} + 2\varpi r_c^2\frac{\varepsilon_\theta}{u}\right] & -\frac{\partial-\xi_G}{r_G^2}\frac{1}{u^2} & -\frac{1}{r_G^2}\left[\frac{(1+2\partial) - 2(\partial-\xi_G)}{m} - \frac{\varpi^2 r_c^2}{u^2}\right] & 0 \\
-1 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & \lambda & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & \lambda
\end{vmatrix} = 0 \quad , \tag{140}$$

où :

$$r_G^2 = r_c^2 - (a - \xi_G)^2 \quad . \tag{141}$$

Cette équation du 5ème degré par rapport à λ est l'équation caractéristique qui admet donc 5 racines (réelles ou complexes). La solution générale du système linéarisé est une superposition de toutes les solutions particulières et elle s'écrit formellement, si toutes les racines caractéristiques λ_k sont simples,

$$w_i = \sum_{k=1}^{5} C_{i,k}\, e^{\lambda_k s} \quad . \tag{142}$$

Plus précisément, pour $u \neq 0$, l'équation caractéristique (140) se présente comme suit :

$$\lambda\left(\lambda^4 + l_1\lambda^3 + l_2\lambda^2 + l_3\lambda + l_4\right) = 0 \quad , \tag{143}$$

avec :

$$l_1 = \frac{2}{r_G^2}\left\{\frac{\left(a^2 + r_G^2\right) - 2a\left(a - \xi_G\right) + \left(a - \xi_G\right)^2}{m} + \left[r_G^2 + \left(a - \xi_G\right)^2\right]\frac{\varepsilon_\delta + \varpi\varepsilon_\theta}{u}\right\} \quad , \tag{144$_1$}$$

$$l_2 = \frac{1}{r_G^2}\left\{\frac{1}{m^2} - \frac{\left(1 + 2a\right) - 2\left(a - \xi_G\right)}{m} + \frac{\left(\varpi^2 + 1\right)\left[r_G^2 + \left(a - \xi_G\right)^2\right]}{u^2} + \frac{4a^2}{m}\frac{\varepsilon_\delta}{u} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r_G^2}\frac{4r_G^2 - \left(1 + 2a\right)\left(a - \xi_G\right) + 2\left(a - \xi_G\right)^2}{m}\left[r_G^2 + \left(a - \xi_G\right)^2\right]\varpi\frac{\varepsilon_\theta}{u} + \frac{2}{r_G^2}\left[2r_G^2 + \left(a - \xi_G\right)^2\right]\left[r_G^2 + \left(a - \xi_G\right)^2\right]\varpi\frac{\varepsilon_\delta\varepsilon_\theta}{u^2}\right\} \quad , \tag{144$_2$}$$

$$l_3 = \frac{1}{r_G^2}\left\{2\frac{\left(a^2 + \varpi^2 r_G^2\right) + \varpi^2\left(a - \xi_G\right)^2}{mu^2} - 2\frac{1 + 2a}{m}\frac{\varepsilon_\delta}{u} + 2\frac{r_G^2 + \left(a - \xi_G\right)^2}{u^2}\varpi^2\frac{\varepsilon_\delta}{u} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r_G^2}\left[2r_G^2 + \left(a - \xi_G\right)^2\right]\left[r_G^2 + \left(a - \xi_G\right)^2\right]\frac{\varpi}{u^2}\frac{\varepsilon_\theta}{u}\right\} \quad , \tag{144$_3$}$$

$$l_4 = \frac{1}{r_G^2}\left\{\left[r_G^2 + \left(a - \xi_G\right)^2\right]\frac{\varpi^2}{u^4} - \frac{1 + 2a}{mu^2}\right\} \quad . \tag{144$_4$}$$

Cette équation admet une racine nulle et quatre racines, réelles ou complexes, distinctes ou confondues ; par ailleurs, comme elle est à coefficients réels, dès qu'elle admet une racine complexe, elle admet aussi la racine conjuguée.

D'autre part, introduisons les notations matricielles suivantes :

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \\ W_5 \end{bmatrix}, \qquad (145_1)$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \frac{2r_G^2-(1+2a)(a-\xi_G)+2(a-\xi_G)^2}{mr_G^2} & -\frac{(1-2a)r_G^2+2a^2(a-\xi_G)+(1-2a)(a-\xi_G)^2}{mr_G^2} & 0 & -\frac{2r_G^2-(1+2a)(a-\xi_G)+2(a-\xi_G)^2}{mr_G^2} & 0 \\ \frac{(1+2a)-2(a-\xi_G)}{mr_G^2} & \frac{2a^2+(1-2a)(a-\xi_G)}{mr_G^2} & 0 & -\frac{(1+2a)-2(a-\xi_G)}{mr_G^2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (145_2)$$

$$\mathcal{B}_1 = \begin{bmatrix} 2\dfrac{r_G^2+(a-\xi_G)^2}{r_G^2}\varepsilon_\delta & -\dfrac{\varpi r_G^2(a-\xi_G)+\varpi(a-\xi_G)^3}{r_G^2}\varepsilon_\theta & 0 & 0 & 0 \\ -2\dfrac{a-\xi_G}{r_G^2}\varepsilon_\delta & 2\dfrac{\varpi r_G^2+\varpi(a-\xi_G)^2}{r_G^2}\varepsilon_\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \qquad (145_3)$$

$$\mathcal{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dfrac{r_G^2+(a-\xi_G)^2}{r_G^2} & -\dfrac{\varpi^2 r_G^2(a-\xi_G)+\varpi^2(a-\xi_G)^3}{r_G^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{a-\xi_G}{r_G^2} & \dfrac{\varpi^2 r_G^2+\varpi^2(a-\xi_G)^2}{r_G^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \qquad (145_4)$$

Le système différentiel numérique (138) équivaut alors à l'équation différentielle matricielle

$$\frac{dW}{ds} + \left(\mathcal{A} + \frac{1}{u}\mathcal{B}_1 + \frac{1}{u^2}\mathcal{B}_2\right).W = 0 \quad , \qquad (146)$$

avec $u \neq 0$ et

$$\mathcal{W}_{(0)} = \begin{bmatrix} (W_1)_0 \\ (W_2)_0 \\ (W_3)_0 \\ (W_4)_0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{147}$$

Pour préciser la forme des solutions de (146), nous utiliserons certaines propriétés classiques des matrices carrées. En particulier, $\mathcal{I}$ désignant la matrice unité d'ordre cinq, l'équation caractéristique (140) s'écrit

$$\det\left[\lambda \mathcal{I} + \left(\mathcal{A}_0 + \frac{1}{u}\mathcal{B}_1 + \frac{1}{u^2}\mathcal{B}_2\right)\right] = 0 \quad ; \tag{148}$$

les valeurs propres de la matrice carrée $(\mathcal{A}_0 + \frac{1}{u}\mathcal{B}_1 + \frac{1}{u^2}\mathcal{B}_2)$ sont les racines caractéristiques du système différentiel (138) c'est-à-dire les racines λ_k de l'équation caractéristique (140). Par la suite, nous ne considérerons que le cas où toutes les racines caractéristiques sont simples. A chaque racine λ_k est alors associé un vecteur-colonne $\mathcal{U}_{k\neq 0}$, dit vecteur propre-colonne, défini à un facteur près et satisfaisant à

$$\left[\lambda_k \mathcal{I} + \left(\mathcal{A}_0 + \frac{1}{u}\mathcal{B}_1 + \frac{1}{u^2}\mathcal{B}_2\right)\right].\mathcal{U}_k = 0 \quad ; \tag{149}$$

pour $\lambda_k \neq 0$ $(k = 1, 2, 3, 4)$, les vecteurs propres peuvent s'écrire :

$$\mathcal{U}_k = \begin{bmatrix} \lambda_k K_{(\lambda_k)} \\ \lambda_k \\ K_{(\lambda_k)} \\ 1 \\ \frac{1}{\lambda_k} \end{bmatrix}, \qquad (150)$$

avec

$$K_{(\lambda)} = \frac{\left\{\frac{(1-2a)r_G^2+2a^2(a-\xi_G)+(1-2a)(a-\xi_G)^2}{m}+\left[r_G^2+(a-\xi_G)^2\right](a-\xi_G)\varpi\frac{\varepsilon_\theta}{u}\right\}\lambda+\left\{\frac{2r_G^2-(1+2a)(a-\xi_G)+2(a-\xi_G)^2}{m}+\left[r_G^2+(a-\xi_G)^2\right](a-\xi_G)\frac{\varpi^2}{u^2}\right\}}{r_G^2\lambda^2+\left\{\frac{2r_G^2-(1+2a)(a-\xi_G)+2(a-\xi_G)^2}{m}+2\left[r_G^2+(a-\xi_G)^2\right]\frac{\varepsilon_\delta}{u}\right\}\lambda+\left[r_G^2+(a-\xi_G)^2\right]\frac{1}{u^2}}, \qquad (151_1)$$

$$= -\frac{r_G^2\lambda^2+\left\{\frac{2a^2+(1-2a)(a-\xi_G)}{m}+2\left[r_G^2+(a-\xi_G)^2\right]\varpi\frac{\varepsilon_\theta}{u}\right\}\lambda-\left\{\frac{(1+2a)-2(a-\xi_G)}{m}-\left[r_G^2+(a-\xi_G)^2\right]\frac{\varpi^2}{u^2}\right\}}{\left[\frac{(1+2a)-2(a-\xi_G)}{m}-2(a-\xi_G)\frac{\varepsilon_\delta}{u}\right]\lambda-\frac{a-\xi_G}{u^2}} \qquad (151_2)$$

et, pour $\lambda_k = 0$ ($k = 5$), le vecteur propre correspondant peut être écrit :

$$\mathcal{U}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad (152)$$

On vérifie directement que

$$\mathcal{W}_{k(s)} = \mathcal{U}_k e^{\lambda_k s} \tag{153}$$

est solution de (146) ; la solution générale de (146) est alors

$$\mathcal{W}_{(s)} = \sum_{k=1}^{5} \alpha_k \mathcal{U}_k e^{\lambda_k s} , \tag{154}$$

où α_1 , ..., α_5 désignent 5 constantes arbitraires, et la solution générale de (138) est donnée par

$$w_{i(s)} = \sum_{k=1}^{5} \alpha_k u_{i,k} e^{\lambda_k s} , \tag{155}$$

en désigant par $u_{i,k}$ les composantes de $\mathcal{U}_k$. Enfin, pour réaliser la condition initiale (139), ou son équivalente (147), il faut et il suffit que l'on ait :

$$\alpha_5 = - \sum_{k=1}^{4} \frac{\alpha_k}{\lambda_k} . \tag{156}$$

3.2.2.- Stabilité de l'équilibre.

3.2.2.1.- Généralités.

Rappelons (cf. § 3.1.3) que la solution d'équilibre $\mathcal{W}_{i(s)} = 0$ (ou $\mathcal{W}_{(s)} = 0$) du système différentiel (138), qui est définie pour tout $s \geqslant 0$, sera dite stable par rapport aux w_k si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta = \eta_{(\varepsilon)} > 0$ tel que toute autre solution $w'_{i(s)}$, donnée par (155), définie pour $s \geqslant 0$ (comme c'est le cas) et vérifiant $\left\| w'_{i(0)} \right\| \leqslant \eta$, satisfait à $\left\| w'_{k(s)} \right\| \leqslant \varepsilon$ pour $s \geqslant 0$. Si, de plus, $w'_{k(s)} \to 0$ quand $s \to \infty$, on dira que la solution d'équilibre $w_{i(s)} = 0$ est asymptotiquement stable par rapport aux w_k .

En tenant compte de (150) et (152), on vérifie donc facilement, à partir de (155) , que la solution d'équilibre est stable par rapport aux w_k ($k = 1, \ldots, 4, 5$) si et seulement si les valeurs propres λ_l ($l = 1, \ldots, 4$) ont toutes leur partie réelle négative ou nulle. En outre, l'équilibre est asymptotiquement stable par rapport aux w_l ($l = 1, \ldots, 4$) si et seulement si les valeurs propres λ_l ($l = 1, \ldots, 4$) ont toutes leur partie réelle strictement négative ; dans ce cas et d'après (156), l'équilibre est asymptotiquement stable aussi par rapport à w_5.

Or, par exemple, le théorème de Routh permet d'exprimer très généralement qu'un polynôme en λ de degré n (n'admettant pas de parité donnée, c'est-à-dire ni pair ni impair) a toutes ses racines à partie réelle strictement négative ; il se traduit par des règles qui s'appliquent simplement. Soit le polynôme (ni pair ni impair) :

$$\Delta_{4(\lambda)} = \lambda^4 + l_1\lambda^3 + l_2\lambda^2 + l_3\lambda + l_4 \qquad (157)$$

dont les coefficients sont donnés par les expressions (144). On place ces coefficients sur deux lignes :

$$1 \qquad l_2 \qquad l_4$$

$$l_1 \qquad l_3$$

puis on constitue une nouvelle ligne :

$$l_1 l_2 - l_3 \qquad l_1 l_4$$

et ensuite une nouvelle ligne :

$$(l_1 l_2 - l_3) l_3 - l_1^2 l_4$$

et finalement la ligne :

$$\left[(l_1 l_2 - l_3) l_3 - l_1^2 l_4\right] l_1 l_4$$

.../...

qui termine le tableau puisque $n=4$. Les conditions nécessaires et suffisantes, dites conditions de Routh, pour que l'équation $\Delta_4(\lambda)=0$ ait toutes ses racines à partie réelle strictement négative sont que tous les termes de la première colonne du tableau complet ainsi formé soient strictement positifs ; ces conditions peuvent s'exprimer par les relations suivantes équivalentes :

$$I_1 > 0 \quad , \tag{158$_1$}$$

$$I_1 I_2 - I_3 > 0 \quad , \tag{158$_2$}$$

$$(I_1 I_2 - I_3) I_3 - I_1^2 I_4 > 0 \quad , \tag{158$_3$}$$

$$I_4 > 0 \quad . \tag{158$_4$}$$

Mais, d'après l'expression (144$_1$) de I_1 , on vérifie que ce coefficient est toujours strictement positif si, comme nous le supposons, les facteurs d'amortissement structural ε_δ et ε_θ ne sont pas strictement négatifs. Par ailleurs, d'après l'expression (144$_3$) de I_3 , on vérifie, sous les mêmes conditions que précédemment, que ce coefficient est toujours strictement positif si le coefficient I_4 n'est pas strictement négatif. Enfin et alors, l'inégalité (158$_2$) est conséquence des inégalités (158$_3$) et (158$_4$). Les conditions de Routh (158) peuvent donc s'écrire plus simplement :

$$I_4 > 0 \quad , \tag{159$_1$}$$

$$\mathcal{D} \equiv I_3^2 - I_1 I_2 I_3 + I_1^2 I_4 < 0 \quad . \tag{159$_2$}$$

En remarquant que, dans le cas général, les coefficients I_k sont des polynômes entiers de degré k en $\frac{1}{u}$, on constate que $\mathcal{D}$ sera, en général, un polynôme entier du sixième degré en $\frac{1}{u}$. L'étude littérale de l'inégalité (159$_2$) n'est donc pratiquement pas possible dans le cas général et nous serons amenés, dans la suite, à particulariser le problème posé.

Mais, auparavant, nous allons considérer le cas où la vitesse de translation U est infiniment petite car il nous servira à trouver, pour ε_δ et ε_θ, des inégalités qui, pour des raisons physiques, seront d'ailleurs vérifiées.

3.2.2.2.- Comportement au voisinage de $u=0$.

3.2.2.2.1.- Cas limite $U=0$.

Compte tenu de la définition (117_1) de la variable s, il est nécessaire de revenir ici à la variable temporelle physique t. Le système différentiel correspondant s'écrit alors, après linéarisation (il est à remarquer que, dans ce cas, les non-linéarités ne seraient que d'origine cinématique, à l'exclusion de cause aérodynamique puisque les forces d'inertie induites par le fluide sont négligées) :

$$\frac{d^2\delta}{dt^2}+\left(a-\xi_G\right)\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\varepsilon_\delta\omega_\delta\frac{d\delta}{dt}+\omega_\delta^2\delta=0 \quad , \tag{160$_1$}$$

$$\frac{a-\xi_G}{r_c^2}\frac{d^2\delta}{dt^2}+\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\varpi\varepsilon_\theta\omega_\delta\frac{d\theta}{dt}+\varpi^2\omega_\delta^2\theta=0 \quad , \tag{160$_2$}$$

$$\mathcal{S}=0 \quad . \tag{160$_3$}$$

On obtient alors facilement les expressions suivantes pour les coefficients $(l_k)_o$ de l'équation caractéristique correspondant à (160_1) et (160_2) :

$$(l_1)_o=2\frac{r_G^2+\left(a-\xi_G\right)^2}{r_G^2}\left(\varepsilon_\delta+\varpi\varepsilon_\theta\right)\omega_\delta \quad , \tag{161$_1$}$$

$$(l_2)_o=\frac{r_G^2+\left(a-\xi_G\right)^2}{r_G^2}\left(1+\varpi^2+4\varpi\varepsilon_\delta\varepsilon_\theta\right)\omega_\delta^2 \quad , \tag{161$_2$}$$

$$(l_3)_o=2\frac{r_G^2+\left(a-\xi_G\right)^2}{r_G^2}\left(\varepsilon_\delta\varpi+\varepsilon_\theta\right)\varpi\omega_\delta^3 \quad , \tag{161$_3$}$$

$$(l_4)_o=\frac{r_G^2+\left(a-\xi_G\right)^2}{r_G^2}\varpi^2\omega_\delta^4 \quad . \tag{161$_4$}$$

Par ailleurs, nous avons, pour $\mathcal{D}_o\equiv(l_3)_o^2-(l_1)_o(l_2)_o(l_3)_o+(l_1)_o^2(l_4)_o$:

$$\mathcal{D}_0 = 4\left[\frac{r_G^2+(a-\xi_G)^2}{r_G^2}\right]^2 \varpi\,\omega_\delta^6\left[(\varepsilon_\delta\varpi+\varepsilon_\theta)^2\varpi - \frac{r_G^2+(a-\xi_G)^2}{r_G^2}(\varepsilon_\delta+\varpi\varepsilon_\theta)(\varepsilon_\theta+\varepsilon_\delta\varpi^3+4\varepsilon_\delta^2\varepsilon_\theta\varpi^2+4\varepsilon_\delta\varepsilon_\theta\varpi)\right] \quad (162)$$

Si ε_δ et ε_θ sont tous les deux nuls, il vient :

$$(l_1)_0 = (l_3)_0 = \mathcal{D}_0 = 0 \quad ,$$

$$(l_4)_0 > 0 \quad ;$$

la solution d'équilibre $\delta = \theta = \frac{d\delta}{dt} = \frac{d\theta}{dt} = 0$ est stable, par rapport à δ , θ , $\frac{d\delta}{dt}$ et $\frac{d\theta}{dt}$, mais non asymptotiquement. Si l'un au moins des facteurs d'amortissement structural ε est strictement positif, comme on peut physiquement le supposer, les conditions de Routh (159) sont vérifiées et la solution d'équilibre est asymptotiquement stable par rapport à δ , θ , $\frac{d\delta}{dt}$ et $\frac{d\theta}{dt}$.

3.2.2.2.2.- Etude pour u infiniment petit.

L'application $u \to \frac{1}{u}$ transformant les voisinages à droite de zéro en les voisinages de l'infini, on peut donc ramener l'étude des conditions de Routh (159) au voisinage de zéro (à droite) à l'étude d'autres conditions au voisinage de l'infini. Il suffit de déterminer la partie principale des coefficients l_k , donnés par (144), par rapport à $\frac{1}{u}$ pour $\frac{1}{u}$ tendant vers l'infini. Deux cas se présenteront suivant que les facteurs ε_δ et ε_θ seront ou non tous les deux nuls, mais les conclusions seront identiques.

3.2.2.2.2.1.- Facteurs d'amortissement structural tous les deux nuls.

Nous avons alors, pour $u \to 0$:

$$l_1 = \frac{2}{r_G^2}\frac{\left[a-(a-\xi_G)\right]^2+r_G^2}{m} \quad , \qquad (163_1)$$

$$l_2 \sim \frac{1}{r_G^2}\frac{(\varpi^2+1)\left[r_G^2+(a-\xi_G)^2\right]}{u^2} \quad , \qquad (163_2)$$

$$I_3 \sim \frac{2}{r_G^2}\,\frac{a^2+\varpi^2\left[r_G^2+\left(a-\xi_G\right)^2\right]}{mu^2} \quad , \tag{163$_3$}$$

$$I_4 \sim \frac{1}{r_G^2}\,\frac{\varpi^2\left[r_G^2+\left(a-\xi_G\right)^2\right]}{u^4} \tag{163$_4$}$$

et :

$$\mathcal{D} \sim -\frac{4}{r_G^6 m^2 u^4}\left[a\left(\varpi^2-1\right)r_G^2+\left(a^2-\varpi^2 r_G^2\right)\left(a-\xi_G\right)+a\left(\varpi^2-1\right)\left(a-\xi_G\right)^2-\varpi^2\left(a-\xi_G\right)^3\right]^2 \quad . \tag{164}$$

Sauf dans des cas discrets très particuliers, tous les coefficients I_k ainsi que $(-\mathcal{D})$ sont strictement positifs et les conditions de Routh sont donc vérifiées. Par conséquent et en général, la solution d'équilibre est asymptotiquement stable par rapport à δ , θ , $\frac{d\delta}{dt}$ et $\frac{d\theta}{dt}$, lorsque u est infiniment petit et $\varepsilon_\delta = \varepsilon_\theta = 0$.

3.2.2.2.2.2.- Au moins un facteur d'amortissement structural non nul.

Nous obtenons alors, pour $u \longrightarrow 0$:

$$I_1 \sim \frac{2}{r_G^2}\left[r_G^2+\left(a-\xi_G\right)^2\right]\frac{\varepsilon_\delta+\varpi\varepsilon_\theta}{u} \quad , \tag{165$_1$}$$

$$I_2 \sim \frac{1}{r_G^2}\left\{\left(\varpi^2+1\right)+\frac{2}{r_G^2}\left[2r_G^2+\left(a-\xi_G\right)^2\right]\varpi\varepsilon_\delta\varepsilon_\theta\right\}\frac{r_G^2+\left(a-\xi_G\right)^2}{u^2} \quad , \tag{165$_2$}$$

$$I_3 \sim \frac{1}{r_G^2}\left\{2\varpi\varepsilon_\delta+\frac{1}{r_G^2}\left[2r_G^2+\left(a-\xi_G\right)^2\right]\varepsilon_\theta\right\}\varpi\,\frac{r_G^2+\left(a-\xi_G\right)^2}{u^3} \quad , \tag{165$_3$}$$

$$I_4 \sim \frac{1}{r_G^2}\left[r_G^2+\left(a-\xi_G\right)^2\right]\frac{\varpi^2}{u^4} \tag{165$_4$}$$

et :

$$\mathfrak{D} \sim -\frac{\left[r_G^2+(a-\xi_G)^2\right]^2 \varpi}{r_G^4 u^6}\left[\frac{4(a-\xi_G)^2\varpi^3}{r_G^2}\varepsilon_\delta^2+\frac{2}{r_G^4}\left[2r_G^4(\varpi^2-1)^2+r_G^2(2\varpi^4-\varpi^2+3)(a-\xi_G)^2+(\varpi^2+1)(a-\xi_G)^4\right]\varepsilon_\delta\varepsilon_\theta+\right.$$

$$+\frac{\varpi}{r_G^4}\left[2r_G^2(\varpi^2+1)+(2\varpi^2+1)(a-\xi_G)^2\right](a-\xi_G)^2\varepsilon_\theta^2+$$

$$+\frac{4}{r_G^6}\left[r_G^2+(a-\xi_G)^2\right]\left[2r_G^2+(a-\xi_G)^2\right]\left\{2r_G^2\varpi^2\varepsilon_\delta^2+\left[2r_G^2(\varpi^2+1)+(a-\xi_G)^2\right]\varpi\varepsilon_\delta\varepsilon_\theta+\right.$$

$$\left.\left.+\left[2r_G^2+(a-\xi_G)^2\right]\varpi^2\varepsilon_\theta^2\right\}\varepsilon_\delta\varepsilon_\theta\right] . \qquad (166)$$

Sauf dans des cas discrets très particuliers et peu physiques, tous les coefficients I_k ainsi que $(-\mathfrak{D})$ sont encore strictement positifs et les conditions de Routh sont donc vérifiées.

Par conséquent et en général, la solution d'équilibre $\delta=\theta=\frac{d\delta}{dt}=\frac{d\theta}{dt}=0$ est asymptotiquement stable par rapport à δ , θ , $\frac{d\delta}{dt}$ et $\frac{d\theta}{dt}$, lorsque u est infiniment petit et $\varepsilon_\delta \geqslant 0, \varepsilon_\theta \geqslant 0$.

3.2.2.3.- Vitesses critiques.

3.2.2.3.1.- Généralités.

Malgré l'hypothèse d'un angle de calage θ_c nul, l'expression de $\mathfrak{D}$ est trop compliquée pour permettre une étude pratique de son signe. Il paraît donc souhaitable de sacrifier une certaine généralité s'il peut en résulter une réduction importante de la complexité. Or, il est manifeste, d'après ce qui précède, qu'une simplification considérable intervient si $(a-\xi_G)=0$ c'est-à-dire si, dans les sections droites de l'aile, le centre élastique et le centre de gravité sont confondus ; c'est pourquoi nous nous contenterons par la suite de ce cas particulier, pour simplifier l'exposé sans modifier l'aspect essentiel des phénomènes non linéaires.

Dans ces conditions, les petits mouvements libres du profil autour de sa position d'équilibre $w_k = 0$ ($k = 1, \ldots, 5$) peuvent être déterminés par le système différentiel linéaire suivant :

$$\frac{dw_1}{ds} = -2\left(\frac{1}{m} + \frac{\varepsilon_\delta}{u}\right)w_1 + \frac{1-2a}{m}w_2 - \frac{1}{u^2}w_3 + \frac{2}{m}w_4 \quad , \tag{167$_1$}$$

$$\frac{dw_2}{ds} = -\frac{1+2a}{mr^2}w_1 - 2\left(\frac{a^2}{mr^2} + \frac{\varpi\varepsilon_\theta}{u}\right)w_2 + \left(\frac{1+2a}{mr^2} - \frac{\varpi^2}{u^2}\right)w_4 \quad , \tag{167$_2$}$$

$$\frac{dw_3}{ds} = w_1 \quad , \tag{167$_3$}$$

$$\frac{dw_4}{ds} = w_2 \quad , \tag{167$_4$}$$

$$\frac{dw_5}{ds} = w_4 \quad , \tag{167$_5$}$$

avec $u \neq 0$ et

$$w_{5(0)} = 0 \quad ; \tag{139}$$

par ailleurs, on a posé :

$$r = r_c = r_G \quad . \tag{168}$$

Les coefficients de l'équation caractéristique s'écrivent alors, à partir de (144) :

$$l_1 = 2\left(\frac{a^2+r^2}{mr^2} + \frac{\varepsilon_\delta + \varpi\varepsilon_\theta}{u}\right) \quad , \tag{169$_1$}$$

$$l_2 = \frac{1-(1+2a)m}{m^2r^2} + 4\,\frac{a^2\varepsilon_\delta + \varpi r^2\varepsilon_\theta}{mr^2u} + \frac{(\varpi^2+1)+4\varpi\varepsilon_\delta\varepsilon_\theta}{u^2} \quad , \tag{169$_2$}$$

$$l_3 = 2\left[-\frac{(1+2a)\varepsilon_\delta}{mr^2u} + \frac{a^2+\varpi^2r^2}{mr^2u^2} + \varpi\,\frac{\varpi\varepsilon_\delta + \varepsilon_\theta}{u^3}\right] \quad , \tag{169$_3$}$$

$$l_4 = -\left(\frac{1+2a}{mr^2} - \frac{\varpi^2}{u^2}\right)\frac{1}{u^2} \tag{169$_4$}$$

et nous avons :

$$\mathfrak{D} = \frac{4}{u}\left(\frac{d_0}{u^5} + \frac{d_1}{u^4} + \frac{d_2}{u^3} + \frac{d_3}{u^2} + \frac{d_4}{u} + d_5\right) , \tag{170}$$

avec :

$$d_0 = -\left[\left(\varpi^2-1\right)^2 + 4\varpi\left(\varpi\varepsilon_\delta + \varepsilon_\theta\right)\left(\varepsilon_\delta + \varpi\varepsilon_\theta\right)\right]\varpi\varepsilon_\delta\varepsilon_\theta , \tag{171$_1$}$$

$$d_1 = -\frac{1}{mr^2}\left[\left[a^2\left(\varpi^2-1\right)^2\varepsilon_\delta + r^2\left(\varpi^2-1\right)^2\varpi\varepsilon_\theta\right] + 4\varpi\left\{a^2\varpi\varepsilon_\delta^3 + \left[2\left(\varpi^2+1\right)a^2 + 3\varpi^2r^2\right]\varepsilon_\delta^2\varepsilon_\theta + \left[3a^2 + 2\left(\varpi^2+1\right)r^2\right]\varpi\varepsilon_\delta\varepsilon_\theta^2 + \varpi^2r^2\varepsilon_\theta^3\right\}\right] , \tag{171$_2$}$$

$$d_2 = -\frac{1}{m^2r^4}\left[\left(\varpi^2-1\right)^2a^2r^2 + \left\{\left[4\left(\varpi^2+1\right)a^4 + 8\varpi^2a^2r^2 + \varpi^2r^2\right]\varepsilon_\delta^2 + \left[1 + 8a^2 + 4\left(\varpi^2+1\right)r^2\right]\varpi^2r^2\varepsilon_\theta^2 + \left[12a^4 + 12\left(\varpi^2+1\right)a^2r^2 + 12\varpi^2r^4 - 2\left(\varpi^2-1\right)\left(1+2a\right)mr^2 + \left(\varpi^2+1\right)r^2\right]\varpi\varepsilon_\delta\varepsilon_\theta\right\} - 4\left(1+2a\right)mr^2\left(\varepsilon_\delta + \varpi\varepsilon_\theta\right)\varpi\varepsilon_\delta^2\varepsilon_\theta\right] , \tag{171$_3$}$$

$$d_3 = -\frac{1}{m^3r^6}\left\{\left[\left\{\left[\left[\left(\varpi^2+1\right) - 2\left(\varpi^2-1\right)\left(1+2a\right)m\right]a^2 + \left[2\varpi^2 - \left(\varpi^2-1\right)\left(1+2a\right)m\right]r^2\right\}r^2 + 4\left[a^4 + \left(\varpi^2+1\right)a^2r^2 + \varpi^2r^4\right]a^2\right]\varepsilon_\delta + \left\{2a^2 + \left[\left(\varpi^2+1\right) - \left(\varpi^2-1\right)\left(1+2a\right)m\right]r^2 + 4\left[a^4 + \left(\varpi^2+1\right)a^2r^2 + \varpi^2r^4\right]\right\}\varpi r^2\varepsilon_\theta - 4\left[a^2\varepsilon_\delta^2 + 2\varpi\left(a^2+r^2\right)\varepsilon_\delta\varepsilon_\theta + \varpi^2r^2\varepsilon_\theta^2\right]\left(1+2a\right)mr^2\varepsilon_\delta\right\} , \tag{171$_4$}$$

$$d_4 = \frac{1}{m^4r^6}\left[\left[\left(\varpi^2-1\right)\left(1+2a\right)mr^2 - \left(a^2+\varpi^2r^2\right)\right]\left(a^2+r^2\right) + \left\{\left[r^2 + 4\left(a^2+r^2\right)a^2\right]\varepsilon_\delta + \left[1 - \left(1+2a\right)m + 4\left(a^2+r^2\right)\right]\varpi r^2\varepsilon_\theta\right\}\left(1+2a\right)m\varepsilon_\delta\right] , \tag{171$_5$}$$

$$d_5 = \frac{1}{m^4r^6}\left[1 - \left(1+2a\right)m\right]\left(1+2a\right)\left(a^2+r^2\right)\varepsilon_\delta . \tag{171$_6$}$$

Il est à remarquer d'une façon générale que, dans l'hypothèse physique, toujours considérée, où

$$\varepsilon_\delta , \ \varepsilon_\theta \geqslant 0$$

et si

$$\begin{cases} 1 \leqslant \varpi \ , & (172_1) \\ a \leqslant -\dfrac{1}{2} \ , & (172_2) \end{cases}$$

les conditions de Routh sont vérifiées et la solution d'équilibre $w_k = 0$ ($k = 1, \ldots, 5$) est toujours asymptotiquement stable par rapport aux w_k, quel que soit $u > 0$. Ce cas se présente très rarement en pratique et, dans la suite, nous supposerons que les inégalités précédentes ne sont pas simultanément vérifiées. Plus particulièrement, une aile normale étant presque toujours plus raide en torsion qu'en flexion $\left(K_\delta < \dfrac{K_\theta}{b^2}\right)$ et le rayon de giration rb étant le plus souvent inférieur à la demi-corde b ($r<1$), nous avons en général $1 \leqslant \varpi$; par ailleurs, la ligne des noeuds du mode propre de torsion étant rarement en avant de la ligne des foyers aérodynamiques statiques, nous avons alors $a > -\dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire $0 < (1+2a)$. Généralement, la solution d'équilibre ne sera donc pas toujours asymptotiquement stable en fonction de la vitesse U et une instabilité apparaîtra pour une certaine valeur U_{cr} dite vitesse critique ; plus précisément, cette circonstance correspondra au fait que l_4 ou $\mathcal{D}$ s'annulera, $u_{cr} = \dfrac{U_{cr}}{\omega_\delta b}$ étant la plus petite racine positive de ces fonctions de u. Nous allons donc étudier rapidement ces deux variables.

Tout d'abord, si $(1+2a)$ est négatif ou nul, c'est-à-dire si la ligne des noeuds du mode propre de torsion n'est pas en arrière de la ligne des foyers aérodynamiques statiques, le coefficient l_4 est strictement positif quel que soit u et la seule condition pour la stabilité de l'équilibre est l'inégalité (159_2). Par contre, si $(1+2a) > 0$, le coefficient l_4 est strictement positif pour $0 < u < u_D$ et strictement négatif pour $u_D < u$, avec :

$$u_D = \varpi r \sqrt{\frac{m}{1+2a}} \ ; \qquad (173)$$

remarquons que, pour la vitesse $U_D = \omega_\delta b u_D = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{K_\theta}{(1+2a)\pi\rho_o}}$, dite vitesse critique de divergence en torsion, la position d'équilibre est indéterminée par rapport à θ et il vient $\delta = \frac{2\varpi^2 r^2}{1+2a}\theta$; pour $U_D < U$, il y a instabilité statique en torsion. Dans l'hypothèse où $(1+2a) > 0$, le coefficient l_4 s'annule donc pour une valeur positive de u et la vitesse critique U_{cr} sera U_D ou la plus petite racine positive en u de $\mathcal{D}$. Mais, $\mathcal{D} = 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $\Delta_4(\lambda) = 0$ ait au moins deux racines imaginaires pures conjuguées c'est-à-dire que le système linéarisé ait au moins un mode propre qui corresponde à un mouvement sinusoïdal pur. La vitesse $U_{F_1} = \omega_\delta b u_{F_1}$, telle que u_{F_1} soit la plus petite racine positive en u de $\mathcal{D}$, est dite vitesse d'entrée en flottement. Par ailleurs, si ε_δ est strictement positif, le coefficient d_5 est strictement négatif et $\mathcal{D}$ s'annule encore au moins une fois pour une valeur positive u_{F_S} de u supérieure à u_{F_1}. La vitesse $U_{F_2} = \omega_\delta b u_{F_2}$, telle que u_{F_2} soit la plus petite des racines u_{F_S} s'il y en a plusieurs, est dite vitesse de sortie de flottement ; entre les deux vitesses critiques U_{F_1} et U_{F_2} se manifeste donc une plage de flottement. En général, U_D, si elle existe, est supérieure à U_{F_1}, ce que nous supposerons ; de plus, dans le cas où U_{F_2} existe, nous ferons l'hypothèse que cette vitesse est inférieure à U_D, c'est-à-dire que, dans tous les cas, nous ne considérerons que les circonstances où l'instabilité est due au flottement et non à la divergence ; dans ces conditions, l'étude pratique de la stabilité de la solution d'équilibre du système linéarisé se réduit à celle du signe de $\mathcal{D}$ en fonction de la variable indépendante u et des six paramètres a, ε_δ, ε_θ, m, ϖ et r.

3.2.2.3.2.- Modes propres de flottement

3.2.2.3.2.1.- Cas général : ε_δ ou ε_θ non nul.

Si l'on suppose, comme c'est le cas pratiquement, que, au moins jusqu'à la vitesse d'entrée en flottement et au moins, si elle existe, jusqu'à la vitesse de sortie de flottement, il y a, pour le système et en dehors du mode propre auquel correspond, pour $U = U_F$, un mouvement sinusoïdal pur, un mode propre auquel est associé un mouvement oscillatoire amorti, les racines caractéristiques λ_k du système différentiel (167) peuvent s'écrire, lorsque $u = u_F$:

$$\lambda_1 = (\lambda_1)_F \quad , \quad \text{avec} \quad \mathcal{R}e\{(\lambda_1)_F\} < 0 \quad , \tag{174$_1$}$$

$$\lambda_2 = (\lambda_2)_F = j\nu_F \quad , \tag{174$_2$}$$

$$\lambda_3 = (\lambda_3)_F = \overline{(\lambda_1)_F} \quad , \tag{174$_3$}$$

$$\lambda_4 = (\lambda_4)_F = -j\nu_F \quad , \tag{174$_4$}$$

$$\lambda_5 = (\lambda_5)_F = 0 \quad , \tag{174$_5$}$$

le conjugué d'un élément complexe étant représenté avec une barre superposée et j étant le nombre imaginaire pur $(0,1)$. Les vecteurs propres-colonnes associés à ces racines peuvent alors se présenter comme suit, d'après (150) et (152) :

$$\mathcal{U}_1 = (\mathcal{U}_1)_F = \begin{bmatrix} (\lambda_1)_F k_1 \\ (\lambda_1)_F \\ k_1 \\ 1 \\ \dfrac{1}{(\lambda_1)_F} \end{bmatrix} \quad , \tag{175$_1$}$$

$$\mathcal{U}_2 = (\mathcal{U}_2)_F = \begin{bmatrix} j\nu_F k_2 \\ j\nu_F \\ k_2 \\ 1 \\ -j\dfrac{1}{\nu_F} \end{bmatrix} \quad , \tag{175$_2$}$$

$$\mathcal{U}_3 = (\mathcal{U}_3)_F = \overline{(\mathcal{U}_1)_F} \quad , \tag{175$_3$}$$

$$\mathcal{U}_4 = (\mathcal{U}_4)_F = \overline{(\mathcal{U}_2)_F} \quad , \tag{175$_4$}$$

$$\mathcal{U}_5 = \left(\mathcal{U}_5\right)_F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} , \qquad (175_5)$$

avec, d'après (151) et puisque nous nous plaçons dans le cas où $\left(a - \xi_G\right) = 0$:

$$k_1 = \frac{\frac{1-2a}{m}\left(\lambda_1\right)_F + \frac{2}{m}}{\left(\lambda_1\right)_F^2 + 2\left(\frac{1}{m} + \frac{\varepsilon_\delta}{u_F}\right)\left(\lambda_1\right)_F + \frac{1}{u_F^2}} = -\frac{\left(\lambda_1\right)_F^2 + 2\left(\frac{a^2}{mr^2} + \varpi\frac{\varepsilon_\theta}{u_F}\right)\left(\lambda_1\right)_F - \left(\frac{1+2a}{mr^2} - \frac{\varpi^2}{u_F^2}\right)}{\frac{1+2a}{mr^2}\left(\lambda_1\right)_F} , \qquad (176)$$

$$k_2 = \frac{1}{m}\,\frac{2\left\{\frac{1}{u_F^2} + \left[\left(1-2a\right)\left(\frac{1}{m} + \frac{\varepsilon_\delta}{u_F}\right) - 1\right]\nu_F^2\right\} + j\left\{\left[\left(1-2a\right)\frac{1}{u_F^2} - 4\left(\frac{1}{m} + \frac{\varepsilon_\delta}{u_F}\right)\right] - \left(1-2a\right)\nu_F^2\right\}\nu_F}{\frac{1}{u_F^4} + 2\left(\frac{2}{m^2} + \frac{4\varepsilon_\delta}{mu_F} - \frac{1-2\varepsilon_\delta^2}{u_F^2}\right)\nu_F^2 + \nu_F^4} \qquad (177_1)$$

$$= -\frac{2\left(\frac{a^2}{mr^2} + \varpi\frac{\varepsilon_\theta}{u_F}\right)\nu_F + j\left[\left(\frac{1+2a}{mr^2} - \frac{\varpi^2}{u_F^2}\right) + \nu_F^2\right]}{\frac{1+2a}{mr^2}\nu_F} . \qquad (177_2)$$

La vitesse réduite de flottement u_F étant racine de l'équation (170) $\mathcal{D} = 0$, la pulsation propre réduite ν_F , telle que (ω_F étant la pulsation propre de flottement)

$$\nu_F = \frac{\omega_F b}{U_F} = \frac{\omega_F}{u_F \omega_\delta} , \qquad (178)$$

vérifie l'équation caractéristique, c'est-à-dire que :

$$\nu_F^4 - j\left(l_1\right)_F \nu_F^3 - \left(l_2\right)_F \nu_F^2 + j\left(l_3\right)_F \nu_F + \left(l_4\right)_F = 0 , \qquad (179)$$

avec :

$$\left(l_i\right)_F = l_{i\,(u=u_F)} . \qquad (180)$$

Il vient alors :

$$v_F^2 = \frac{(I_3)_F}{(I_1)_F} \tag{181}$$

et, par suite :

$$v_F^2 = \frac{1}{u_F^2} \frac{-(1+2a)\varepsilon_\delta u_F^2 + (a^2+\varpi^2 r^2)u_F + m\varpi r^2(\varpi\varepsilon_\delta + \varepsilon_\theta)}{(a^2+r^2)u_F + mr^2(\varepsilon_\delta + \varpi\varepsilon_\theta)} \quad . \tag{182}$$

3.2.2.3.2.2.- Cas particulier : ε_δ et ε_θ nuls.

Si les facteurs d'amortissement structural sont tous les deux nuls, les expressions (176), (177) et (182) se simplifient et deviennent :

$$k_{1(\varepsilon_\delta=\varepsilon_\theta=0)} = \frac{\frac{1-2a}{m}(\lambda_1)_F + \frac{2}{m}}{(\lambda_1)_F^2 + \frac{2}{m}(\lambda_1)_F + \frac{1}{u_F^2}} = -\frac{(\lambda_1)_F^2 + \frac{2a^2}{mr^2}(\lambda_1)_F - \left(\frac{1+2a}{mr^2} - \frac{\varpi^2}{u_F^2}\right)}{\frac{1+2a}{mr^2}(\lambda_1)_F} \quad , \tag{183}$$

$$k_{2(\varepsilon_\delta=\varepsilon_\theta=0)} = \frac{1}{m} \frac{2\left[\frac{1}{u_F^2} + \left(\frac{1-2a}{m} - 1\right)v_F^2\right] + j\left[\left(\frac{1-2a}{u_F^2} - \frac{4}{m}\right) - (1-2a)v_F^2\right]v_F}{\frac{1}{u_F^4} + 2\left(\frac{2}{m^2} - \frac{1}{u_F^2}\right)v_F^2 + v_F^4} = -\frac{\frac{2a^2}{mr^2}v_F + j\left[\left(\frac{1+2a}{mr^2} - \frac{\varpi^2}{u_F^2}\right) + v_F^2\right]}{\frac{1+2a}{mr^2}v_F} \quad , \tag{184}$$

$$v_F^2 = \frac{1}{u_F^2} \frac{a^2+\varpi^2 r^2}{a^2+r^2} \quad ; \tag{185}$$

il est à remarquer que, quelle que soit la valeur de ϖ par rapport à 1, $v_F u_F$ est compris entre ϖ et 1, c'est-à-dire que ω_F est compris entre ω_δ et ω_θ. Par ailleurs, les coefficients I_i de l'équation caractéristique s'écrivent :

$$l_{1\,(\varepsilon_\delta=\varepsilon_\theta=0)} = 2\,\frac{a^2+r^2}{mr^2} \quad , \tag{186$_1$}$$

$$l_{2\,(\varepsilon_\delta=\varepsilon_\theta=0)} = \frac{1-(1+2a)m}{m^2r^2} + \frac{\varpi^2+1}{u^2} \quad , \tag{186$_2$}$$

$$l_{3\,(\varepsilon_\delta=\varepsilon_\theta=0)} = 2\,\frac{a^2+\varpi^2r^2}{mr^2u^2} \quad , \tag{186$_3$}$$

$$l_{4\,(\varepsilon_\delta=\varepsilon_\theta=0)} = -\left(\frac{1+2a}{mr^2} - \frac{\varpi^2}{u^2}\right)\frac{1}{u^2} \tag{186$_4$}$$

et nous avons :

$$\mathcal{D}_{(\varepsilon_\delta=\varepsilon_\theta=0)} = \frac{4}{m^2r^2u^2}\left\{-a^2\left(\varpi^2-1\right)^2\frac{1}{u^2} + \frac{\left[(1-2a)m\left(\varpi^2-1\right)r^2-\left(a^2+\varpi^2r^2\right)\right]\left(a^2+r^2\right)}{m^2r^4}\right\} \quad , \tag{187}$$

d'où, pour u_F lorsqu'elle existe :

$$\frac{1}{u_F^2} = \frac{\left[(1+2a)m\left(\varpi^2-1\right)r^2-\left(a^2+\varpi^2r^2\right)\right]\left(a^2+r^2\right)}{a^2m^2\left(\varpi^2-1\right)^2r^4} \quad , \tag{188}$$

ce qui exige :

$$a^2+\varpi^2r^2 < (1+2a)m\left(\varpi^2-1\right)r^2 \quad ; \tag{189}$$

dans ce cas particulier, il n'y a pas de sortie de flottement pour une vitesse finie (si l'on améliorait les expressions simplifiées des forces aérodynamiques utilisées précédemment, une plage d'instabilité pourrait néanmoins se manifester).

En utilisant les relations (185), (186) et (188), l'équation caractéristique prend, pour $u = u_F$, la forme suivante :

$$\lambda_F\left\{\lambda_F^2+\frac{2(a^2+r^2)}{mr^2}\lambda_F+\frac{\left[(1+2a)m(\varpi^2-1)r^2-(a^2+r^2)\varpi^2\right](a^2+r^2)}{a^2m^2(\varpi^2-1)^2r^4}\right\}\left\{\lambda_F^2+\frac{\left[(1+2a)m(\varpi^2-1)r^2-(a^2+\varpi^2r^2)\right](a^2+\varpi^2r^2)}{a^2m^2(\varpi^2-1)^2r^4}\right\}=0. \quad (190)$$

Puisque u_F correspond à la vitesse d'entrée en flottement, les racines caractéristiques qui vérifient la première accolade de l'équation (190) constituent un couple (λ_1, λ_3) de racines complexes conjuguées ; leur produit est donc positif et, dans ces conditions, nous avons :

$$(a^2+r^2)\varpi^2 < (1+2a)m(\varpi^2-1)r^2 \quad , \quad (191)$$

ce qui est équivalent à (158_2) écrite sous la forme :

$$(l_1)_F(l_2)_F-(l_3)_F>0 \quad ; \quad (192)$$

remarquons que l'inégalité (189) est alors vérifiée, si nous nous plaçons en particulier dans le cas où ϖ est plus grand que 1 ; par ailleurs, le discriminant devant être négatif, ceci implique :

$$\frac{1}{4}(l_1)_F(l_3)_F<(l_4)_F \quad , \quad (193)$$

c'est-à-dire :

$$(a^2+r^2)\left[a^2(\varpi^2-1)^2+\varpi^2\right]<(1+2a)mr^2(\varpi^2-1) \quad . \quad (194)$$

Enfin, (158_4), exprimée sous la forme

$$(l_4)_F>0 \quad , \quad (195)$$

nous donne bien, en tenant compte de la relation (173), une vitesse de flottement plus petite que la vitesse de divergence lorsqu'elles existent toutes les deux, c'est-à-dire lorsque l'on a simultanément $(1+2a)>0$ et $\varpi>1$:

$$u_F < u_D \quad . \quad (196)$$

Lorsque les conditions (189) et (194) sont vérifiées, et ceci implique en particulier $(1+2a)(\varpi-1) > 0$, nous obtenons donc, dans le cas où $\varepsilon_\delta = \varepsilon_\theta = 0$:

$$u_F = \frac{|a|m|\varpi^2-1|r^2}{\sqrt{\left[(1+2a)m(\varpi^2-1)r^2-(a^2+\varpi^2r^2)\right](a^2+r^2)}} \quad , \tag{197}$$

$$(\lambda_1)_F = -\frac{a^2+r^2}{mr^2} + j\frac{\sqrt{a^2+r^2}}{|a|m|\varpi^2-1|r^2}\sqrt{(1+2a)m(\varpi^2-1)r^2-(a^2+r^2)\left[a^2(\varpi^2-1)^2+\varpi^2\right]} \quad , \tag{198}$$

$$\nu_F = \frac{\sqrt{\left[(1+2a)m(\varpi^2-1)r^2-(a^2+\varpi^2r^2)\right](a^2+\varpi^2r^2)}}{|a|m|\varpi^2-1|r^2} \quad , \tag{199}$$

$$k_1 = \frac{2mr^2+(1+2a)(\varpi^2-1)}{(1+2a)m} + j\frac{sgn(\varpi^2-1)}{|a|m\sqrt{a^2+r^2}}\sqrt{(1+2a)m(\varpi^2-1)r^2-(a^2+r^2)\left[a^2(\varpi^2-1)^2+\varpi^2\right]} \quad , \tag{200}$$

$$k_2 = -\frac{1}{1+2a}\left[2a^2+j|a|sgn(\varpi^2-1)\sqrt{\frac{a^2+\varpi^2r^2}{(1+2a)m(\varpi^2-1)r^2-(a^2+\varpi^2r^2)}}\right] . \tag{201}$$

3.3.- Système non linéaire.

Le système physique que l'on a considéré comme linéaire dans le paragraphe 3.2 n'est, en réalité, linéaire que moyennant certaines approximations et, en particulier, le moule mathématique linéaire est insuffisamment précis si les vibrations étudiées atteignent une amplitude notable. Par ailleurs, les notions linéaires sont incapables de rendre compte d'un certain nombre de phénomènes très importants dans la théorie et la pratique, par exemple l'existence de cycles (ou oscillations) limites : la théorie linéaire ne connaît que des systèmes stables ou instables et ne peut pas rendre compte d'oscillations périodiques à amplitude fixe. Or, un problème très important est la recherche de solution périodique du système autonome non linéaire (132). On ne dispose d'aucune méthode d'investigation assez

puissante pour répondre à cette question de manière générale. Les méthodes existantes sont de deux sortes. Les unes, les méthodes topologiques, fournissent des résultats d'existence de solutions périodiques ; elles constituent un outil puissant pour l'étude de certains systèmes fortement non linéaires et peuvent être d'une grande élégance en ayant, par rapport à d'autres méthodes, l'avantage d'être rigoureuses, mais leurs principales limitations sont qu'elles ne s'appliquent pratiquement qu'aux systèmes à deux variables (W_1 et W_2), c'est-à-dire aux systèmes simples, et qu'elles ne sont que qualitatives bien que synthétiques. Les autres sont des méthodes analytiques ; nous citerons, entre autres, la méthode de variation des constantes, les méthodes de perturbation, la méthode de l'équivalent harmonique ; le calcul de représentations asymptotiques des solutions périodiques est généralement possible, ainsi que l'étude de la stabilité de ces solutions.

Plus particulièrement, en complément de l'étude linéaire effectuée au paragraphe 3.2, les questions suivantes peuvent être posées, au voisinage de la solution d'équilibre $W_i = 0$:

- dans le cas (I) où il y a existence de flottement :
  - jusqu'à quelles amplitudes initiales, une solution asymptotiquement stable dans le domaine linéaire le reste-t-elle en non-linéaire ;
  - peut-il y avoir une solution linéairement instable qui devienne bornée dans le domaine non linéaire ; c'est-à-dire la solution d'équilibre peut-elle être le centre de vibrations stables d'amplitudes finies en non-linéaire ;
  - une solution stable, mais non asymptotiquement, en linéaire est-elle toujours stable en non-linéaire, c'est-à-dire,à une vitesse critique de flottement, la solution d'équilibre est-elle stable ou instable dans le domaine non linéaire ;
- dans le cas (II) où il n'existe aucun flottement, c'est-à-dire lorsque la solution d'équilibre est toujours asymptotiquement stable dans le domaine linéaire, jusqu'à quelles amplitudes initiales le reste-t-elle dans le domaine non linéaire ?

Pour répondre à ces questions, le système différentiel étudié sera résolu au moyen d'un développement asymptotique par rapport à la vitesse réduite u , en utilisant la méthode analytique des perturbations avec échelle de temps multiple. Dans le cas où il existe une vitesse critique de flottement, nous nous limiterons, dans les applications numériques, à un amortissement structural nul alors que, dans le cas contraire, nous prendrons en compte cet amortissement en considérant sa variation à partir d'une certaine valeur critique que nous définirons pour un cas particulier.

3.3.1.- Etude du système au voisinage d'une vitesse critique de flottement

3.3.1.1.- Formulation du problème

Le système d'équations différentielles ordinaires à étudier est, à partir de (132) et avec $\left(a-\xi_G\right)=0$:

$$\frac{dw_1}{ds}=\left[-2\left(\frac{1}{m}+\frac{\varepsilon_\delta}{u}\right)w_1+\frac{1-2a}{m}w_2-\frac{1}{u^2}w_3+\frac{2}{m}w_4\right]+\left[w_2^2w_3+\frac{1}{m}w_1w_4^2-\frac{1-2a}{2m}w_2w_4^2-\frac{4}{3m}w_4^3\right] \quad , \tag{202$_1$}$$

$$\begin{aligned}\frac{dw_2}{ds}=&\left[-\frac{1+2a}{mr^2}w_1-2\left(\frac{a^2}{mr^2}+\varpi\frac{\varepsilon_\theta}{u}\right)w_2+\left(\frac{1+2a}{mr^2}-\frac{\varpi^2}{u^2}\right)w_4\right]+\left[-\frac{2}{r^2}w_1w_2w_3+\frac{1+2a}{mr^4}w_1w_3^2+\frac{a}{mr^2}w_2^2w_3+\frac{4}{mr^2}w_1w_3w_4+\right.\\&+\frac{2}{r^2}\left(\frac{a^2+r^2}{mr^2}+\varpi\frac{\varepsilon_\theta}{u}\right)w_2w_3^2-\frac{1-6a}{2mr^2}w_1w_4^2-3\frac{1-2a}{mr^2}w_2w_3w_4-\frac{1}{r^2}\left(\frac{1+2a}{mr^2}-\frac{\varpi^2}{u^2}\right)w_3^2w_4-\frac{(1-3a)a}{mr^2}w_2w_4^2-\\&\left.-\frac{2}{mr^2}w_1w_4w_5-\frac{2}{mr^2}w_2w_3w_5-\frac{2}{mr^2}w_3w_4^2-\frac{2a}{mr^2}w_2w_4w_5-2\frac{1+2a}{3mr^2}w_4^3\right] \quad ,\end{aligned} \tag{202$_2$}$$

$$\frac{dw_3}{ds}=w_1 \quad , \tag{202$_3$}$$

$$\frac{dw_4}{ds}=w_2 \quad , \tag{202$_4$}$$

$$\frac{dw_5}{ds}=w_4 \quad , \tag{202$_5$}$$

compte tenu de $u \neq 0$ et

$$w_{s(0)} = 0 \ . \tag{139}$$

Introduisons les notations matricielles (145) écrites sous la forme particulière suivante dans le cas où $(a - \xi_G) = 0$:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \frac{2}{m} & -\frac{1-2a}{m} & 0 & -\frac{2}{m} & 0 \\ \frac{1+2a}{mr^2} & \frac{2a^2}{mr^2} & 0 & -\frac{1+2a}{mr^2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} , \tag{203$_1$}$$

$$\mathcal{B}_1 = 2. \begin{bmatrix} \varepsilon_\delta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varpi \varepsilon_\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \tag{203$_2$}$$

$$\mathcal{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varpi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \tag{203$_3$}$$

ainsi que

$$\mathcal{C}_{(\mathcal{W};u;\varepsilon_\theta)} = \begin{bmatrix} C_1(w_1,w_2,w_3,w_4,w_5;u;\varepsilon_\theta) \\ C_2(w_1,w_2,w_3,w_4,w_5;u;\varepsilon_\theta) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (204_1)$$

avec :

$$C_1 = w_2^2 w_3 + \frac{1}{m} w_1 w_4^2 - \frac{1-2a}{2m} w_2 w_4^2 - \frac{4}{3m} w_4^3 \quad , \qquad (204_2)$$

$$C_2 = -\frac{2}{r^2} w_1 w_2 w_3 + \frac{1+2a}{mr^4} w_1 w_3^2 + \frac{a}{mr^2} w_2^2 w_3 + \frac{4}{mr^2} w_1 w_3 w_4 + \frac{2}{r^2}\left(\frac{a^2+r^2}{mr^2} + \varpi\frac{\varepsilon_\theta}{u}\right) w_2 w_3^2 - \frac{1-6a}{2mr^2} w_1 w_4^2 -$$

$$- 3\frac{1-2a}{mr^2} w_2 w_3 w_4 - \frac{1}{r^2}\left(\frac{1+2a}{mr^2} - \frac{\varpi^2}{u^2}\right) w_3^2 w_4 - \frac{(1-3a)a}{mr^2} w_2 w_4^2 - \frac{2}{mr^2} w_1 w_4 w_5 - \frac{2}{mr^2} w_2 w_3 w_5 -$$

$$- \frac{2}{mr^2} w_3 w_4^2 - \frac{2a}{mr^2} w_2 w_4 w_5 - 2\frac{1+2a}{3mr^2} w_4^3 \quad . \qquad (204_3)$$

Par ailleurs, en introduisant l'opérateur linéaire matriciel

$$\mathcal{L}_{(s,u)} = \mathcal{J}\frac{d}{ds} + \left(\mathcal{A} + \frac{1}{u}\mathcal{B}_1 + \frac{1}{u^2}\mathcal{B}_2\right) \quad , \qquad (205)$$

où $\mathcal{J}$ est la matrice unité d'ordre cinq, le système d'équations différentielles numériques non linéaire (202) s'écrit alors :

$$\mathcal{L}.\mathcal{W} = \mathcal{C}_{(\mathcal{W};u;\varepsilon_\theta)} \quad . \qquad (206)$$

Nous considérerons le cas où le système linéaire représenté par l'équation différentielle matricielle

$$\mathcal{L}.\mathcal{W} = 0$$

est asymptotiquement stable pour les valeurs du paramètre $u > 0$ extérieures à l'intervalle fermé $\left[u_{F_1}, u_{F_2}\right]$ et instable dans l'intervalle ouvert $\left]u_{F_1}, u_{F_2}\right[$; les limites u_{F_1} et u_{F_2} sont des valeurs critiques u_F pour lesquelles la matrice carrée

$$\mathcal{M}_{(u)} = \mathcal{A} + \frac{1}{u}\mathcal{B}_1 + \frac{1}{u^2}\mathcal{B}_2 \qquad (207)$$

a un couple de valeurs propres imaginaires pures opposées. Le système non linéaire, équation (206), sera étudié pour des valeurs de u voisines de u_F , en utilisant la méthode dite d'échelles de temps multiples. La méthode consiste à transformer l'équation différentielle ordinaire matricielle, non linéaire, autonome et du premier ordre (206) en un système d'équations aux dérivées partielles matricielles, linéaires, du premier ordre, à coefficients constants et avec second membre.

Soit, alors :

$$v = \left|\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u_F^2}\right| \geq 0 \quad , \qquad (208_1)$$

$$\sigma = sgn\left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u_F^2}\right) \qquad (208_2)$$

et

$$\tilde{\mathcal{W}}_{(s;v)} = \frac{1}{\sqrt{v}}\,\mathcal{W}\left[s;u=\left(\sigma v + \frac{1}{u_F^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] \quad ; \qquad (209)$$

l'équation (206) devient, pour v tendant vers zéro :

$$\mathcal{L}_F.\tilde{\mathcal{W}} = \left[-\sigma\left(\frac{u_F}{2}\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2\right).\tilde{\mathcal{W}} + \mathcal{C}_{(\tilde{\mathcal{W}};u_F;\varepsilon_\theta)}\right].v + 0(v^2) \quad , \qquad (210_1)$$

où

$$\mathcal{L}_F = \mathcal{L}_{(s;u_F)} \quad . \qquad (210_2)$$

Pour déterminer une solution approchée de l'équation différentielle (206), la matrice-colonne $\tilde{\mathcal{W}}_{(s;\nu)}$ sera alors représentée, au voisinage de $\nu=0$, par un développement asymptotique par rapport à l'échelle de comparaison $\nu^n \ (n \geq 0)$; plus précisément, nous nous limiterons à un développement à 2 termes et $\tilde{\mathcal{W}}$ prendra la forme suivante ($\mathcal{W}_0$ et $\mathcal{W}_1$ ne dépendant pas directement de ν) :

$$\tilde{\mathcal{W}}_{(s;\nu)} = \mathcal{W}_{0(s_0,s_1)} + \nu\, \mathcal{W}_{1(s_0,s_1)} + O(\nu s_1) \ , \tag{211}$$

où les différentes échelles de temps réduit s_0 et s_1 telles que

$$\left| \begin{array}{ll} s_0 = s \ , & (212_1) \\ s_1 = \nu s & (212_2) \end{array} \right.$$

sont considérées comme étant, avec ν , des variables indépendantes, ce qui entraîne

$$\frac{d}{ds} = \frac{\partial}{\partial s_0} + \nu \frac{\partial}{\partial s_1} \ ; \tag{213}$$

les relations de s_0 et s_1 vers $\mathcal{W}_0$ et $\mathcal{W}_1$ seront déterminées, par la suite, pour éviter l'apparition de termes dits séculaires dans la solution finale.

A partir des expression (211) et (213), l'équation (210) s'écrit :

$$\mathcal{L}_0 . \mathcal{W}_0 + \left\{ \mathcal{L}_0 . \mathcal{W}_1 + \left[\frac{\partial \mathcal{W}_0}{\partial s_1} + \sigma \left(\frac{u_F}{2} \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 \right) . \mathcal{W}_0 - \mathcal{C}_{(\mathcal{W}_0; u_F; \varepsilon_\theta)} \right] \right\} \nu + O(\nu^2) = 0 \ , \tag{214_1}$$

avec :

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{J} \frac{\partial}{\partial s_0} + \left(\mathcal{A} + \frac{1}{u_F} \mathcal{B}_1 + \frac{1}{u_F^2} \mathcal{B}_2 \right) \ . \tag{214_2}$$

Puisque l'équation (214) doit être valable pour toutes les valeurs de l'infiniment petit ν , chacun des coefficients des puissances de ν doit s'annuler indépendamment, étant donné que $\mathcal{W}_0$ et $\mathcal{W}_1$ ne dépendent pas de ν et que les termes correspondant aux puissances de ν sont linéairement indépendants par rapport à ν . En considérant les termes de même ordre en ν, nous obtenons alors le système suivant d'équations aux dérivées partielles :

$$\mathcal{L}_0 . \mathcal{W}_0 = 0 \quad , \tag{215$_1$}$$

$$\mathcal{L}_0 . \mathcal{W}_1 = -\frac{\partial \mathcal{W}_0}{\partial s_1} - \sigma\left(\frac{u_F}{2}\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2\right).\mathcal{W}_0 + \mathcal{C}_{(\mathcal{W}_0 ; u_F ; \varepsilon_\theta)} \quad , \tag{215$_2$}$$

pour déterminer les deux fonctions $\mathcal{W}_0$ et $\mathcal{W}_1$ de s_0 et s_1 . La solution de l'équation (215$_1$) contiendra des fonctions arbitraires de la variable s_1 ; elles seront déterminées en imposant la condition que $\dfrac{\|\mathcal{W}_1\|}{\|\mathcal{W}_0\|}$ soit fini pour toutes les valeurs de s_0 , $\|\mathcal{W}_k\|$ représentant la norme de la matrice-colonne $\mathcal{W}_k$. Il est à remarquer que cette condition ne signifie pas que $\|\mathcal{W}_0\|$ et $\|\mathcal{W}_1\|$ sont finies et, en fait, elles ne le sont pas dans certains cas, mais elle est équivalente à l'élimination des termes séculaires en s_0 dans l'expression de $\mathcal{W}_0$.

3.3.1.2.- Résolution du problème.

3.3.1.2.1.- Terme d'ordre zéro.

Le système d'ordre zéro, équation (215$_1$), représente le problème du flottement linéaire pour $u = u_F$ et il a pour solution générale (cf. (154)) :

$$\mathcal{W}_0 = \sum_{k=1}^{5} \alpha_k \left(\mathcal{U}_k\right)_F e^{(\lambda_k)_F s_0} \quad , \tag{216}$$

où $(\lambda_k)_F$ et $(\mathcal{U}_k)_F$ sont, respectivement, les valeurs propres et les vecteurs propres-colonnes associés de la matrice carrée $\mathcal{M}_F = \mathcal{M}_{(u_F)}$, équation (207), et les α_k sont des fonctions complexes de s_1 . Parmi les valeurs propres, l'une ($k=5$) est nulle, deux autres ($k = 2, 4$) sont imaginaires pures conjuguées et les deux autres ($k = 1, 3$) sont complexes conjuguées à partie réelle strictement négative ; par conséquent, le conjugué d'un élément étant représenté avec une barre superposée, il vient :

$$\mathcal{W}_0 = \alpha_{1(s_1)}\left(\mathcal{U}_1\right)_F e^{(\lambda_1)_F s_0} + \overline{\alpha}_{1(s_1)}\left(\overline{\mathcal{U}_1}\right)_F e^{(\overline{\lambda_1})_F s_0} + \alpha_{2(s_1)}\left(\mathcal{U}_2\right)_F e^{j\nu_F s_0} + \overline{\alpha}_{2(s_1)}\left(\overline{\mathcal{U}_2}\right)_F e^{-j\nu_F s_0} + \alpha_{5(s_1)}\left(\mathcal{U}_5\right)_F \quad , \tag{217}$$

les vecteurs-colonnes $(\mathcal{U}_k)_F$ ($k = 1, 2, 5$) étant donnés par les relations (175$_1$), (175$_2$) et (175$_5$) et ν_F par (182).

3.3.1.2.2.- Terme d'ordre un.

Nous considérerons maintenant le système d'ordre un, équation (215_2), mais nous allons d'abord déterminer une expression intéressante pour le vecteur $\mathcal{C}_{(\mathcal{W}_o;u_F;\varepsilon_\theta)}$. Plus précisément, c_i ($i = 1, \ldots, 5$) étant le ième élément de la matrice-colonne $\mathcal{C}$, nous avons, d'après les relations (204) :

$$c_{i(w_1,w_2,w_3,w_4,w_5;u;\varepsilon_\theta)} = \sum_{l,m,n=1}^{5} c_{ilmn}(u;\varepsilon_\theta)\, w_l\, w_m\, w_n \quad , \quad l \leqslant m \leqslant n \quad ; \tag{218}$$

si $(u_{ki})_F$ et w_{oi} sont respectivement les ièmes éléments des matrices-colonnes $(\mathcal{U}_k)_F$ et $\mathcal{W}_o$ ($i, k = 1, \ldots, 5$), nous pouvons alors écrire, à partir de (216) et si $(c_i)_F$ est le ième élément de la matrice-colonne $\mathcal{C}_F = \mathcal{C}_{(\mathcal{W}_o;u_F;\varepsilon_\theta)}$:

$$(c_i)_F = c_{i(w_{o1},w_{o2},w_{o3},w_{o4},w_{o5};u_F;\varepsilon_\theta)} = \sum_{l,m,n=1}^{5} c_{ilmn}(u_F;\varepsilon_\theta) w_{ol}\, w_{om}\, w_{on} \quad , \quad l \leqslant m \leqslant n \quad ,$$

$$= \sum_{l,m,n=1}^{5} \sum_{p,q,r=1}^{5} c_{ilmn}(u_F;\varepsilon_\theta)(u_{pl})_F (u_{qm})_F (u_{rn})_F \alpha_p \alpha_q \alpha_r\, e^{\left[(\lambda_p)_F + (\lambda_q)_F + (\lambda_r)_F\right] s_o} \quad . \tag{219}$$

Il est maintenant commode d'isoler les termes pour lesquels $\left[(\lambda_p)_F + (\lambda_q)_F + (\lambda_r)_F\right]$ est égal à l'une des valeurs propres $(\lambda_k)_F$ car ce sont eux qui donnent les termes séculaires dans la solution. En tenant compte, d'une part, que les éléments c_i sont linéaires par rapport à w_5 et, d'autre part, que $u_{5i} = 0$ pour $i \neq 5$, on trouve :

$$w_{ol}\, w_{om}\, w_{on} = \sum_{k=1}^{5} h_{klmn} \alpha_k \alpha_2 \bar{\alpha}_2\, e^{(\lambda_k)_F s_o} + \sum_{p,q,r=1}^{5} g_{lmnpqr} \alpha_p \alpha_q \alpha_r\, e^{\left[(\lambda_p)_F + (\lambda_q)_F + (\lambda_r)_F\right] s_o} \quad , \tag{220}$$

avec :

$$h_{1lmn} = \left[(u_{2m})_F (\bar{u}_{2n})_F + (\bar{u}_{2m})_F (u_{2n})_F\right](u_{1l})_F + \left[(u_{2l})_F (\bar{u}_{2n})_F + (\bar{u}_{2l})_F (u_{2n})_F\right](u_{1m})_F + \left[(u_{2l})_F (\bar{u}_{2m})_F + (\bar{u}_{2l})_F (u_{2m})_F\right](u_{1n})_F \quad , \tag{221$_1$}$$

$$h_{2lmn} = (u_{2l})_F (u_{2m})_F (\bar{u}_{2n})_F + (u_{2l})_F (\bar{u}_{2m})_F (u_{2n})_F + (\bar{u}_{2l})_F (u_{2m})_F (u_{2n})_F \quad , \tag{221$_2$}$$

$$h_{3lmn} = \bar{h}_{1lmn} \quad , \tag{221$_3$}$$

$$h_{4lmn}=\overline{h}_{2lmn} \quad , \tag{221_4}$$

$$h_{5lmn}=\left[\left(u_{2l}\right)_F\left(\overline{u}_{2m}\right)_F+\left(\overline{u}_{2l}\right)_F\left(u_{2m}\right)_F\right]\left(u_{5n}\right)_F \tag{221_5}$$

et :

$$g_{lmnpqr}=\begin{cases}\left(u_{pl}\right)_F\left(u_{qm}\right)_F\left(u_{rn}\right)_F & , \quad \text{pour} \quad \left[\left(\lambda_p\right)_F+\left(\lambda_q\right)_F+\left(\lambda_r\right)_F\right]\neq\left(\lambda_k\right)_F \quad , \quad (222_1) \\ 0 & , \quad \text{pour} \quad \left[\left(\lambda_p\right)_F+\left(\lambda_q\right)_F+\left(\lambda_r\right)_F\right]=\left(\lambda_k\right)_F \quad . \quad (222_2)\end{cases}$$

Les ièmes éléments des matrices-colonnes $\left(\mathcal{C}_{1k}\right)_F$ et $\left(\mathcal{C}_{2pqr}\right)_F$ étant respectivement $\left(c_{1ki}\right)_F$ et $\left(c_{2pqri}\right)_F$ tels que :

$$\left(c_{1ki}\right)_F=\sum_{l,m,n=1}^{5} c_{ilmn}\left(u_F;\varepsilon_\theta\right)h_{klmn} \quad , \tag{223_1}$$

$$\left(c_{2pqri}\right)_F=\sum_{l,m,n=1}^{5} c_{ilmn}\left(u_F;\varepsilon_\theta\right)g_{lmnpqr}\alpha_p\alpha_q\alpha_r \quad , \tag{223_2}$$

nous pouvons alors écrire :

$$\mathcal{C}_F=\sum_{k=1}^{5}\left(\mathcal{C}_{1k}\right)_F\alpha_k\alpha_2\overline{\alpha}_2\, e^{\left(\lambda_k\right)_F s_0}+\sum_{p,q,r=1}^{5}\left(\mathcal{C}_{2pqr}\right)_F e^{\left[\left(\lambda_p\right)_F+\left(\lambda_q\right)_F+\left(\lambda_r\right)_F\right]s_0} \quad . \tag{224}$$

En tenant compte de cette expression de $\mathcal{C}_F$, l'équation différentielle matricielle (215_2) peut être écrite sous la forme suivante :

$$\mathcal{L}_o.\mathcal{W}_1=\sum_{k=1}^{5}\left(\mathcal{P}_k\right)_{F(s_1)} e^{\left(\lambda_k\right)_F s_0}+\sum_{p,q,r=1}^{5}\left(\mathcal{C}_{2pqr}\right)_{F(s_1)} e^{\left[\left(\lambda_p\right)_F+\left(\lambda_q\right)_F+\left(\lambda_r\right)_F\right]s_0} \quad , \tag{225}$$

dans laquelle $\left[\left(\lambda_p\right)_F+\left(\lambda_q\right)_F+\left(\lambda_r\right)_F\right]\neq\left(\lambda_k\right)_F$, pour chaque p , q , r et k , et :

$$\left(\mathcal{P}_k\right)_F=-\left(\mathcal{U}_k\right)_F\frac{d\alpha_k}{ds_1}-\sigma\left(\frac{u_F}{2}\mathcal{B}_1+\mathcal{B}_2\right).\left(\mathcal{U}_k\right)_F\alpha_k+\left(\mathcal{C}_{1k}\right)_F\alpha_k\alpha_2\overline{\alpha}_2 \quad . \tag{226}$$

Soit alors $(\mathcal{V}_k)_F$ le vecteur propre-ligne de $\mathcal{M}_F = \mathcal{A} + \frac{1}{U_F}\mathcal{B}_1 + \frac{1}{U_F^2}\mathcal{B}_2$ associé à la valeur propre $(\lambda_k)_F$ de $\mathcal{M}_F$; nous avons (orthogonalité des vecteurs propres) :

$$(\mathcal{V}_i)_F \cdot (\mathcal{U}_k)_F \begin{cases} = 0 \quad , \quad si \quad i \neq k \quad , & (227_1) \\ \neq 0 \quad , \quad si \quad i = k \quad . & (227_2) \end{cases}$$

Par ailleurs, toute solution de (225) peut être recherchée sous la forme (q_k : complexe) :

$$\mathcal{W}_1 = \sum_{k=1}^{5} q_{k\,(s_0,s_1)} (\mathcal{U}_k)_F e^{(\lambda_k)_F s_0} \qquad (228)$$

et il est aisé de voir que (225) conduit alors à :

$$\sum_{k=1}^{5} (\mathcal{U}_k)_F \frac{\partial q_k}{\partial s_0} e^{(\lambda_k)_F s_0} = \sum_{k=1}^{5} (\mathcal{P}_k)_F e^{(\lambda_k)_F s_0} + \sum_{p,q,r=1}^{5} (\mathcal{C}_{2pqr})_F e^{\left[(\lambda_p)_F + (\lambda_q)_F + (\lambda_r)_F\right] s_0} \quad ; \qquad (229)$$

en prémultipliant les deux membres de cette équation par $(\mathcal{V}_i)_F$ et en tenant compte de (227), on obtient (i = 1, ..., 5) :

$$\frac{\partial q_i}{\partial s_0} = \sum_{k=1}^{5} \frac{(\mathcal{V}_i)_F \cdot (\mathcal{P}_k)_F}{(\mathcal{V}_i)_F \cdot (\mathcal{U}_i)_F} e^{\left[(\lambda_k)_F - (\lambda_i)_F\right] s_0} + \sum_{p,q,r=1}^{5} \frac{(\mathcal{V}_i)_F \cdot (\mathcal{C}_{2pqr})_F}{(\mathcal{V}_i)_F \cdot (\mathcal{U}_i)_F} e^{\left\{\left[(\lambda_p)_F + (\lambda_q)_F + (\lambda_r)_F\right] - (\lambda_i)_F\right\} s_0} \quad . \qquad (230)$$

La condition nécessaire et suffisante pour ne pas avoir de terme séculaire dans la solution de (225), c'est-à-dire, pour q_i , de terme séculaire pur de la forme $\frac{(\mathcal{V}_i)_F \cdot (\mathcal{P}_i)_F}{(\mathcal{V}_i)_F \cdot (\mathcal{U}_i)_F} s_0$, est :

$$(\mathcal{V}_i)_F \cdot (\mathcal{P}_i)_{F\,(s_1)} = 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, 5 \quad , \qquad (231)$$

ou, en remplaçant $\left(\mathcal{P}_i\right)_F$ par l'expression (226),

$$\frac{d\alpha_i}{ds_1}+\sigma\beta_i\alpha_i-\gamma_i\alpha_i\alpha_2\bar{\alpha}_2=0 \quad , \quad i=1,\dots,5 \quad , \tag{232}$$

avec :

$$\beta_i=\frac{\left(\mathcal{V}_i\right)_F\cdot\left(\frac{u_F}{2}\mathcal{B}_1+\mathcal{B}_2\right)\cdot\left(\mathcal{U}_i\right)_F}{\left(\mathcal{V}_i\right)_F\cdot\left(\mathcal{U}_i\right)_F} \quad , \tag{233$_1$}$$

$$\gamma_i=\frac{\left(\mathcal{V}_i\right)_F\cdot\left(\mathcal{C}_{1i}\right)_F}{\left(\mathcal{V}_i\right)_F\cdot\left(\mathcal{U}_i\right)_F} \quad . \tag{233$_2$}$$

En fait, l'ensemble des cinq équations différentielles (232) peut se réduire au système suivant, puisque les équations d'indices $i = 3$ et 4 sont respectivement les conjuguées des équations d'indices $i = 1$ et 2 :

$$\frac{d\alpha_1}{ds_1}+\sigma\beta_1\alpha_1-\gamma_1\alpha_1\alpha_2\bar{\alpha}_2=0 \quad , \tag{234$_1$}$$

$$\frac{d\alpha_2}{ds_1}+\sigma\beta_2\alpha_2-\gamma_2\alpha_2^2\bar{\alpha}_2=0 \quad , \tag{234$_2$}$$

$$\frac{d\alpha_5}{ds_1}-\gamma_5\alpha_5\alpha_2\bar{\alpha}_2=0 \quad ; \tag{234$_3$}$$

dans la dernière équation, nous avons tenu compte de ce que $\left(\frac{u_F}{2}\mathcal{B}_1+\mathcal{B}_2\right)\cdot\left(\mathcal{U}_5\right)_F$ est nul, donc $\beta_5=0$.

Pour résoudre d'abord l'équation (234$_2$), nous considérons la forme trigonométrique de la variable complexe α_2 et nous poserons :

$$\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{r_2}}e^{j\psi_2} \quad , \tag{235}$$

r_2 étant une fonction réelle positive de s_1 et ψ_2 étant une fonction réelle de s_1 . L'équation (234$_2$) devient, si, d'une façon générale, $z'+jz''$ est la forme cartésienne du nombre complexe z :

$$\left(-\frac{1}{2r_2}\frac{dr_2}{ds_1}+\sigma\beta_2'-\frac{\gamma_2'}{r_2}\right)+j\left(\frac{d\psi_2}{ds_1}+\sigma\beta_2''-\frac{\gamma_2''}{r_2}\right)=0 \; ; \qquad (236)$$

d'où, en séparant les parties réelles et imaginaires :

$$\frac{dr_2}{ds_1}-2\sigma\beta_2' r_2+2\gamma_2'=0 \quad , \qquad (237_1)$$

$$\frac{d\psi_2}{ds_1}+\sigma\beta_2''-\frac{\gamma_2''}{r_2}=0 \quad . \qquad (237_2)$$

L'intégration de (237_1) est celle d'une équation différentielle du premier ordre, linéaire par rapport à r_2 , dont la solution peut s'écrire :

$$r_2=\sigma\frac{\gamma_2'}{\beta_2'}\left\{\left[\sigma\frac{\beta_2'}{\gamma_2'}\frac{1}{|\alpha_{2(0)}|^2}-1\right]e^{2\sigma\beta_2' s_1}+1\right\} \quad . \qquad (238)$$

L'intégration de (237_2) est immédiate et donne :

$$\psi_2=-\sigma\beta_2'' s_1+\gamma_2''\int_0^{s_1}\frac{d\sigma_1}{r_{2(s_1=\sigma_1)}}+\arg\alpha_{2(0)} \quad , \qquad (239)$$

d'où, en tenant compte de (237_1) :

$$\psi_2=\sigma\frac{\beta_2'\gamma_2''-\beta_2''\gamma_2'}{\gamma_2'}s_1+\frac{\gamma_2''}{\gamma_2'}\operatorname{Log}\frac{\sqrt{r_{2(0)}}}{\sqrt{r_2}}+\arg\alpha_{2(0)} \quad . \qquad (240)$$

En définitive, nous obtenons, à partir des expression (238) et (240) :

$$\alpha_2=\alpha_{2(0)}\left\{\frac{\sigma\frac{\beta_2'}{\gamma_2'}}{\left[\sigma\frac{\beta_2'}{\gamma_2'}-|\alpha_{2(0)}|^2\right]e^{2\sigma\beta_2' s_1}+|\alpha_{2(0)}|^2}\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot e^{j\left[\sigma\frac{\beta_2'\gamma_2''-\beta_2''\gamma_2'}{\gamma_2'}s_1+\frac{\gamma_2''}{\gamma_2'}\operatorname{Log}\left\{\frac{\sigma\frac{\beta_2'}{\gamma_2'}}{\left[\sigma\frac{\beta_2'}{\gamma_2'}-|\alpha_{2(0)}|^2\right]e^{2\sigma\beta_2' s_1}+|\alpha_{2(0)}|^2}\right\}^{\frac{1}{2}}\right]} \quad . \qquad (241)$$

Ayant déterminé α_2 , les intégrations des équations (234_1) et (234_3) sont simples, puisque celles-ci sont du premier ordre et linéaires par rapport à α_1 et α_5 respectivement. En effet, nous avons

$$\alpha_i = \alpha_{i(0)} \cdot e^{-\left[\sigma\beta_i s_1 - \gamma_1 \int_0^{s_1} (\alpha_2\bar{\alpha}_2)_{(s_1=\sigma_1)} d\sigma_1\right]} \quad , \quad i = 1,5 \quad , \tag{242}$$

et

$$\alpha_2\bar{\alpha}_2 = |\alpha_{2(0)}|^2 \frac{\sigma\dfrac{\beta'_2}{\gamma'_2}}{\left[\sigma\dfrac{\beta'_2}{\gamma'_2} - |\alpha_{2(0)}|^2\right] e^{2\sigma\beta'_2 s_1} + |\alpha_{2(0)}|^2} \quad , \tag{243}$$

d'où :

$$\int_0^{s_1} (\alpha_2\bar{\alpha}_2)_{(s_1=\sigma_1)} d\sigma_1 = \frac{1}{\gamma'_2}\left[\sigma\beta'_2 s_1 + \mathrm{Log}\left\{\frac{\sigma\dfrac{\beta'_2}{\gamma'_2}}{\left[\sigma\dfrac{\beta'_2}{\gamma'_2} - |\alpha_{2(0)}|^2\right] e^{2\sigma\beta'_2 s_1} + |\alpha_{2(0)}|^2}\right\}^{\frac{1}{2}}\right] . \tag{244}$$

Tous calculs faits, nous obtenons :

$$\alpha_1 = \alpha_{1(0)} e^{\sigma\frac{\beta'_2\gamma'_1 - \beta'_1\gamma'_2}{\gamma'_2} s_1} \left\{\frac{\sigma\dfrac{\beta'_2}{\gamma'_2}}{\left[\sigma\dfrac{\beta'_2}{\gamma'_2} - |\alpha_{2(0)}|^2\right] e^{2\sigma\beta'_2 s_1} + |\alpha_{2(0)}|^2}\right\}^{\frac{1}{2}\frac{\gamma'_1}{\gamma'_2}} \cdot e^{j\left[\sigma\frac{\beta'_2\gamma''_1 - \beta''_1\gamma'_2}{\gamma'_2} s_1 + \frac{\gamma''_1}{\gamma'_1}\mathrm{Log}\left\{\frac{\sigma\frac{\beta'_2}{\gamma'_2}}{\left[\sigma\frac{\beta'_2}{\gamma'_2} - |\alpha_{2(0)}|^2\right] e^{2\sigma\beta'_2 s_1} + |\alpha_{2(0)}|^2}\right\}^{\frac{1}{2}\frac{\gamma'_1}{\gamma'_2}}\right]} , \tag{245}$$

et, puisque $\gamma''_5 = 0$,

$$\alpha_5 = \alpha_{5(0)} e^{\sigma\frac{\beta'_2\gamma'_5}{\gamma'_2} s_1} \left\{\frac{\sigma\dfrac{\beta'_2}{\gamma'_2}}{\left[\sigma\dfrac{\beta'_2}{\gamma'_2} - |\alpha_{2(0)}|^2\right] e^{2\sigma\beta'_2 s_1} + |\alpha_{2(0)}|^2}\right\}^{\frac{1}{2}\frac{\gamma'_5}{\gamma'_2}} . \tag{246}$$

La solution générale de l'équation différentielle matricielle (225) est donc, avec $\left[(\lambda_p)_F+(\lambda_q)_F+(\lambda_r)_F\right]\neq(\lambda_k)_F$ pour chaque p , q , r et k et compte tenu des équations (230) :

$$\mathcal{W}_1=\sum_{\substack{i,k=1\\ i\neq k}}^{5} e^{(\lambda_k)_F s_0}\frac{1}{(\lambda_k)_F-(\lambda_i)_F}\frac{(\mathcal{V}_i)_F\cdot(\mathcal{P}_k)_{F(s_1)}}{(\mathcal{V}_i)_F\cdot(\mathcal{U}_i)_F}(\mathcal{U}_i)_F+\sum_{p,q,r=1}^{5} e^{\left[(\lambda_p)_F+(\lambda_q)_F+(\lambda_r)_F\right]s_0}\left\{\left[(\lambda_p)_F+(\lambda_q)_F+(\lambda_r)_F\right]\mathcal{I}+\mathcal{M}_F\right\}^{-1}\cdot(\mathcal{C}_{2pqr})_{F(s_1)}+$$
$$+\sum_{k=1}^{5} e^{(\lambda_k)_F s_0} r_{k(s_1)}(\mathcal{U}_k)_F \quad ; \qquad (247)$$

en tenant compte de la définition (226), nous obtenons, d'autre part, pour $i\neq k$:

$$(\mathcal{V}_i)_F\cdot(\mathcal{P}_k)_F=-(\mathcal{V}_i)_F\left[\sigma\left(\frac{u_F}{2}\mathcal{B}_1+\mathcal{B}_2\right)\cdot(\mathcal{U}_k)_F-(\mathcal{C}_{1k})_F(\alpha_2\bar{\alpha}_2)\right]\alpha_k \quad . \qquad (248)$$

Par ailleurs, pour satisfaire à la condition initiale

$$\mathcal{W}_{1(s_0=0,s_1=0)}=0 \quad , \qquad (249)$$

nous devons avoir :

$$r_{k(s_1=0)}=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{5}\frac{1}{(\lambda_k)_F-(\lambda_i)_F}\frac{(\mathcal{V}_k)_F\cdot(\mathcal{P}_i)_{F(s_1=0)}}{(\mathcal{V}_k)_F\cdot(\mathcal{U}_k)_F}-\sum_{p,q,r=1}^{5}\frac{(\mathcal{V}_k)_F\cdot\left\{\left[(\lambda_p)_F+(\lambda_q)_F+(\lambda_r)_F\right]\mathcal{I}+\mathcal{M}_F\right\}^{-1}\cdot(\mathcal{C}_{2pqr})_{F(s_1=0)}}{(\mathcal{V}_k)_F\cdot(\mathcal{U}_k)_F} \quad . \qquad (250)$$

A ce stade, les fonctions complexes r_k de la variable réelle $s_1=vs$ restent indéterminées, exception faite de leur valeur initiale donnée par l'expression (250). Pour préciser leur forme, il faudrait faire intervenir le terme $v^2\mathcal{W}_2$ dans le développement limité (211) de $\tilde{\mathcal{W}}$ et introduire la variable supplémentaire $s_2=v^2s$ avec les définitions (212) ; de plus, il est important de noter que l'introduction du terme $\mathcal{W}_2$ impliquerait la connaissance des termes non linéaires du cinquième ordre pour que le développement de $\tilde{\mathcal{W}}$ soit rigoureusement valable. Nous ne le ferons pas et, dans la suite, nous ne considérerons que la partie principale de $\tilde{\mathcal{W}}$ par rapport à v c'est-à-dire $\mathcal{W}_0$.

3.3.1.2.3.- Partie principale.

Finalement, en utilisant les relations (209), (211), (212) et (217), la solution transitoire $\mathcal{W}$ de l'équation (206) est asymptotiquement équivalente, pour ν tendant vers zéro, à

$$\mathcal{W}_p = 2\,\mathcal{R}e\left\{\alpha^{*}_{1(s_1=\nu s)}\, e^{(\lambda_1)_F s}\,(\mathcal{U}_1)_F + \alpha^{*}_{2(s_1=\nu s)}\, e^{j\nu_F s}\,(\mathcal{U}_2)_F\right\} + \alpha^{*}_{5(s_1=\nu s)}(\mathcal{U}_5)_F \quad , \tag{251}$$

en posant :

$$\alpha^{*}_k = \sqrt{\nu}\,\alpha_k \quad . \tag{252}$$

Pour satisfaire à la condition initiale (147), nous devons avoir, d'autre part :

$$\sqrt{\nu}\,\mathcal{W}_{o(s_o=0,s_1=0)} = \mathcal{W}_{(0)} \quad , \tag{253}$$

c'est-à-dire, sans expliciter les a_{ik} indépendants de ν :

$$\alpha^{*}_{i(0)} = \sum_{k=1}^{4} a_{ik}\left[(\lambda_1)_F, \nu_F, k_1, k_2\right](w_k)_o \quad , \quad i = 1,2 \quad , \tag{254$_1$}$$

$$\alpha^{*}_{5(0)} = 2\,\mathcal{R}e\left\{-\frac{1}{(\lambda_1)_F}\alpha^{*}_{1(0)} + \frac{j}{\nu_F}\alpha^{*}_{2(0)}\right\} \quad , \tag{254$_2$}$$

ces paramètres ne dépendant donc pas eux-mêmes de ν .

3.3.1.3.- Analyse de la solution.

3.3.1.3.1.- Etude préliminaire.

Nous allons d'abord étudier rapidement la variation, en fonction de s, de la fonction $f_{(s;\nu)}$ suivante :

$$f_{(s;\nu)} = \left\{\frac{\sigma\dfrac{\beta'_2}{\gamma'_2}\nu}{\left[\sigma\dfrac{\beta'_2}{\gamma'_2}\nu - \left|\alpha^{*}_{2(0)}\right|^2\right]e^{2\sigma\beta'_2\nu s} + \left|\alpha^{*}_{2(0)}\right|^2}\right\}^{\frac{1}{2}} \quad , \tag{255}$$

qui apparaît dans les expressions des $\alpha_{i(v;s)}$. Cette fonction dépend des paramètres $\sigma\beta'_2$ et γ'_2 et la recherche de son comportement introduit la valeur particulière, négative ou positive,

$$s_a = \frac{1}{2\sigma\beta'_2 v} \operatorname{Log} \frac{\left|\alpha^*_{2(0)}\right|^2}{\left|\sigma\frac{\beta'_2}{\gamma'_2}v - \left|\alpha^*_{2(0)}\right|^2\right|} \quad . \tag{256}$$

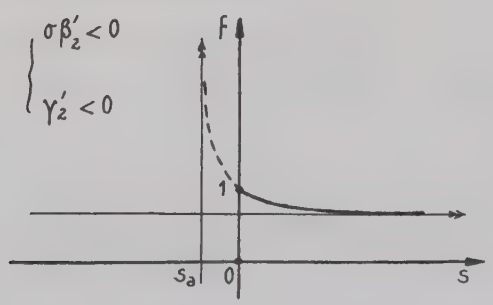
En éliminant les cas frontières, on obtient les résultats résumés ci-après, sachant que l'on a toujours $f_{(s=0;v)} \equiv 1$.

a) Si $\sigma\beta'_2 < 0$, deux cas sont possibles suivant le signe de γ'_2 :

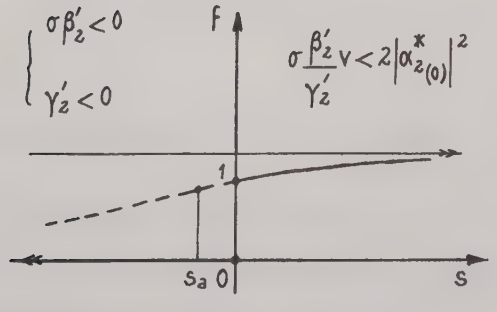
- Cas 1 : $\gamma'_2 < 0$:

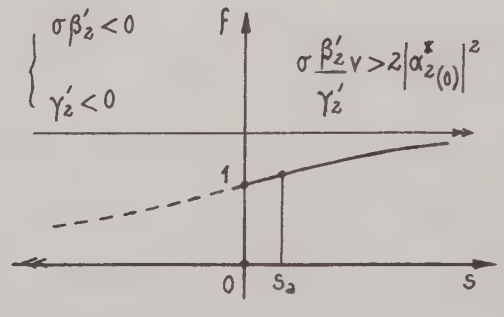
$\sigma\frac{\beta'_2}{\gamma'_2}$ est alors positif et la variation de f dépend de la condition initiale $\alpha^*_{2(0)}$:

- pour : $\sigma\frac{\beta'_2}{\gamma'_2}v < \left|\alpha^*_{2(0)}\right|^2$, la courbe représentative de f a une asymptote verticale d'abscisse $s_a < 0$ et une asymptote horizontale d'ordonnée $\frac{1}{\left|\alpha^*_{2(0)}\right|}\sqrt{\sigma\frac{\beta'_2}{\gamma'_2}v} < 1$; son allure est la suivante :



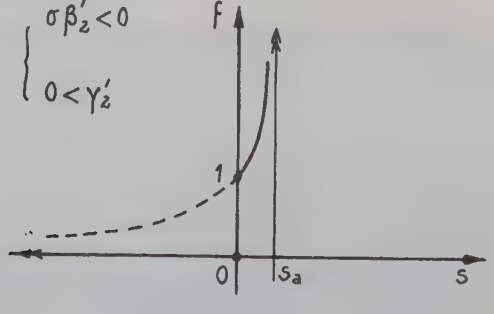
- pour : $\sigma\frac{\beta'_2}{\gamma'_2}v > \left|\alpha^*_{2(0)}\right|^2$, la courbe représentative de f a une asymptote horizontale d'ordonnée $\frac{1}{\left|\alpha^*_{2(0)}\right|}\sqrt{\sigma\frac{\beta'_2}{\gamma'_2}v} > 1$, une asymptote horizontale confondue avec l'axe des s et un point d'inflexion d'abscisse $s_a \leq 0$; son allure est la suivante, suivant le signe de s_a c'est-à-dire la valeur de $\sigma\frac{\beta'_2}{\gamma'_2}v$ par rapport à $2\left|\alpha^*_{2(0)}\right|^2$:





- Cas 2 : $\gamma'_2 > 0$:

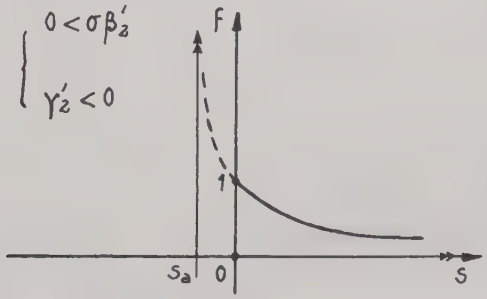
$\sigma\frac{\beta'_2}{\gamma'_2}$ est alors négatif ; la courbe représentative de f a une asymptote verticale d'abscisse $s_a > 0$ et une asymptote horizontale confondue avec l'axe des s ; son allure est la suivante :



b) Si $\sigma\beta'_2>0$, le comportement de f est le symétrique, par rapport à $s=0$, du comportement précédent ; deux cas sont donc possibles suivant le signe de γ'_2 :

- Cas 1 : $\gamma'_2<0$:

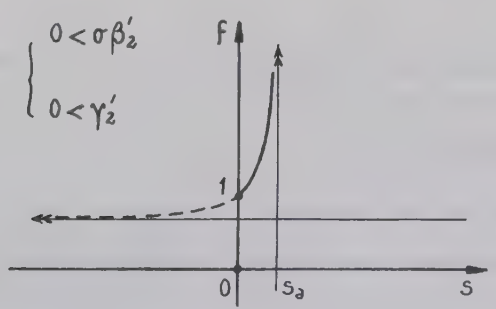
$\sigma\frac{\beta'_2}{\gamma'_2}$ est alors négatif ; la courbe représentative de f a une asymptote verticale d'abscisse $s_a<0$ et une asymptote horizontale confondue avec l'axe des s ; son allure est la suivante :



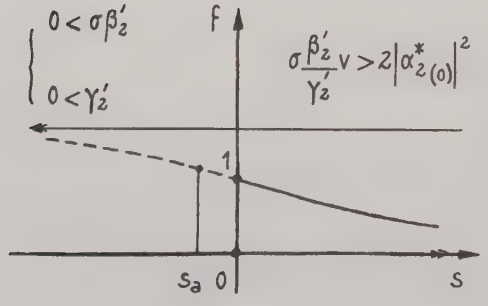
- Cas 2 : $\gamma'_2>0$:

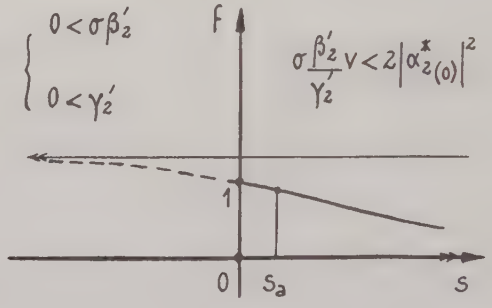
$\sigma\frac{\beta'_2}{\gamma'_2}$ est alors positif et la variation de f dépend de la condition initiale $\alpha^*_{2(0)}$:

- pour $\sigma\frac{\beta'_2}{\gamma'_2}v<\left|\alpha^*_{2(0)}\right|^2$, la courbe représentative de f a une asymptote verticale d'abscisse $s_a>0$ et une asymptote horizontale d'ordonnée $\frac{1}{\left|\alpha^*_{2(0)}\right|}\sqrt{\sigma\frac{\beta'_2}{\gamma'_2}v}<1$; son allure est la suivante :



- pour $\sigma\frac{\beta'_2}{\gamma'_2}v > \left|\alpha^*_{2(0)}\right|^2$, la courbe représentative de f a une asymptote horizontale d'ordonnée $\frac{1}{\left|\alpha^*_{2(0)}\right|}\sqrt{\sigma\frac{\beta'_2}{\gamma'_2}v} > 1$, une asymptote horizontale confondue avec l'axe des s et un joint d'inflexion d'abscisse s_a ; son allure est la suivante, suivant le signe de s_a c'est-à-dire la valeur de $\sigma\frac{\beta'_2}{\gamma'_2}v$ par rapport à $2\left|\alpha^*_{2(0)}\right|^2$:





Remarque. - Dans ce qui précède, nous avons supposé en particulier que $\left|\alpha^*_{2(0)}\right|^2 \neq \sigma\frac{\beta'_2}{\gamma'_2}v$. En effet, si

$$\left|\alpha^*_{2(0)}\right|^2 = \sigma\frac{\beta'_2}{\gamma'_2}v \quad , \tag{257}$$

ce qui implique d'ailleurs

$$\sigma\beta'_2\gamma'_2 > 0 \quad , \tag{258}$$

la fonction $f_{(s;v)}$ se simplifie et nous obtenons, pour toute valeur de s :

$$f = 1 \quad . \tag{259}$$

3.3.1.3.2.- Comportement de $\mathcal{W}_{(s;v)}$.

3.3.1.3.2.1.- Etude détaillée.

En utilisant les relations (241), (245) et (246) qui donnent les α_l ($l = 1, 2, 5$), nous pouvons écrire, à partir de (251) et (252) :

$$W \sim 2\,\mathcal{R}e\left\{\left|\alpha^{*}_{1(0)}\right| e^{\left[\left(\lambda'_1\right)_F+\sigma\frac{\beta'_2\gamma'_1-\beta'_1\gamma'_2}{\gamma'_2}v\right]s}\ \frac{\gamma'_1}{\gamma'_2}\ f_{(s;v)}\ e^{j\left[\left(\lambda''_1\right)_F s+\sigma\frac{\beta'_2\gamma''_1-\beta''_1\gamma'_2}{\gamma'_2}vs+\frac{\gamma''_1}{\gamma'_1}\mathrm{Log}\,f_{(s;v)}+\arg\alpha^{*}_{1(0)}\right]}\left(\mathcal{U}_1\right)_F+\right.$$

$$\left.+\left|\alpha^{*}_{2(0)}\right| f_{(s;v)}\, e^{j\left[\nu_F s+\sigma\frac{\beta'_2\gamma''_2-\beta''_2\gamma'_2}{\gamma'_2}vs+\frac{\gamma''_2}{\gamma'_2}\mathrm{Log}\,f_{(s;v)}+\arg\alpha^{*}_{2(0)}\right]}\left(\mathcal{U}_2\right)_F\right\}+$$

$$+\alpha^{*}_{5(0)} e^{\sigma\frac{\beta'_2\gamma'_5}{\gamma'_2}vs}\ \frac{\gamma'_5}{\gamma'_2}\ f_{(s;v)}\left(\mathcal{U}_5\right)_F \quad , \qquad v \to 0 \quad , \tag{260}$$

sachant que $f_{(s;v)}$ est définie par l'expression (255).

Remarquons d'abord que, dans le cas particulier linéaire, nous avons $\mathcal{C}=0$ et, par conséquent, $\gamma_1=0$.
Dans ces conditions, il vient :

$$\alpha^{*}_{i(s_1=vs,\gamma_1=0)}=\alpha^{*}_{i(0)} e^{-\sigma\beta'_i vs}\ e^{-j\sigma\beta''_i vs} \quad , \quad i=1,2 \quad , \tag{261$_1$}$$

$$\alpha^{*}_{5(s_1=vs,\gamma_1=0)}=\alpha^{*}_{5(0)} \tag{261$_2$}$$

et :

$$W \sim 2\,\mathcal{R}e\left\{\left|\alpha^{*}_{1(0)}\right| e^{\left[\left(\lambda'_1\right)_F-\sigma\beta'_1 v\right]s}\ e^{j\left[\left(\lambda''_1\right)_F s-\sigma\beta''_1 vs+\arg\alpha^{*}_{1(0)}\right]}\left(\mathcal{U}_1\right)_F+\left|\alpha^{*}_{2(0)}\right| e^{-\sigma\beta'_2 vs}\ e^{j\left[\nu_F s-\sigma\beta''_2 vs+\arg\alpha^{*}_{2(0)}\right]}\left(\mathcal{U}_2\right)_F\right\}+$$

$$+\alpha^{*}_{5(0)}\left(\mathcal{U}_5\right)_F \quad , \qquad v \to 0 \quad , \tag{262}$$

Le premier mode étant, si le système est linéaire, asymptotiquement stable par hypothèse, nous devons avoir :

$$\left(\lambda'_1\right)_F < 0 \quad , \tag{263$_1$}$$

$$\left(\lambda'_1\right)_F < \sigma\beta'_1 v \quad , \tag{263$_2$}$$

ce qui limite nécessairement l'intervalle auquel doivent appartenir les valeurs de (σv) pour que l'approximation de $\mathcal{W}$ considérée en (260) soit stable.

D'une façon générale, nous nous placerons dans le cas où, le système étant non linéaire, le premier mode n'est instable que si le second l'est aussi ; en d'autres termes, nous ne considérons que les circonstances où l'instabilité du système est due fondamentalement au mode de torsion. Dans ces conditions, il suffit d'avoir, en plus des inégalités (263) :

$$\frac{\gamma_1'}{\gamma_2'} > 0 \qquad (264_1)$$

et

$$\left(\lambda_1'\right)_F < \sigma\left(\beta_1' - \frac{\beta_2'\gamma_1'}{\gamma_2'}\right)v \quad , \qquad (264_2)$$

afin que $g_{(s;v)}^{\frac{\gamma_1'}{\gamma_2'}}$ soit toujours fini lorsque $f_{(s;v)}$ l'est, si l'on pose :

$$g_{(s;v)} = e^{\sigma\beta_2' v s} f_{(s;v)} \quad ; \qquad (265)$$

dans l'approximation considérée pour $\mathcal{W}$, l'intervalle de (σv) est donc limité par les deux inéquations (263_2) et (264_2). Par ailleurs, comme nous ne nous intéressons à la stabilité du système que par rapport à l'ensemble (w_1, w_2, w_3, w_4), à l'exclusion de w_5 (paramètre "caché"), et que le vecteur propre-colonne $(u_5)_F$ a ses quatre premiers éléments nuls, il suffit pratiquement de considérer l'expression suivante lorsque v tend vers zéro :

$$\mathcal{W}_a = 2\left[\left|\alpha_{1(0)}^{*}\right| e^{\left[\left(\lambda_1'\right)_F - \sigma\beta_1' v\right]s} g_{(s;v)}^{\frac{\gamma_1'}{\gamma_2'}} \cdot \mathcal{R}e\left\{e^{j\left\{\left[\left(\lambda_1''\right)_F - \sigma\beta_1'' v\right]s + \frac{\gamma_1''}{\gamma_2'}\operatorname{Log} g_{(s;v)} + \arg\alpha_{1(0)}^{*}\right\}} \left(u_1\right)_F\right\} + \right.$$

$$\left. + \left|\alpha_{2(0)}^{*}\right| f_{(s;v)} \cdot \mathcal{R}e\left\{e^{j\left\{\left(\nu_F - \sigma\beta_2'' v\right)s + \frac{\gamma_2''}{\gamma_2'}\operatorname{Log} g_{(s;v)} + \arg\alpha_{2(0)}^{*}\right\}} \left(u_2\right)_F\right\}\right] \quad . \qquad (266)$$

Examinons maintenant séparément les deux cas $\gamma_2' \gtrless 0$.

Cas 1 : $\gamma_2' < 0$.

Les fonctions f et g sont définies et continues pour toutes les valeurs de $s \geq 0$ et ont des limites finies lorsque s tend vers l'infini. Le comportement

de $\mathcal{W}_a$ dépend du signe de β'_2 et, éventuellement, de la valeur de $\left|\alpha^*_{2(0)}\right|$.

Si β'_2 est négatif, la position d'équilibre $w_k = 0$ ($k = 1, \ldots, 4, 5$) est asymptotiquement stable par rapport aux w_l ($l = 1, \ldots, 4$) pour $u \geq u_F$ et instable pour $u < u_F$. Cependant, si $u \leq u_F$, il existe un cycle limite stable qui peut s'écrire, lorsque u tend vers u_F (à gauche) :

$$\mathcal{W}_L \sim 2\sqrt{\frac{\beta'_2}{\gamma'_2}\nu}\,.\,\mathcal{R}e\left\{e^{j\left(\nu_F + \frac{\beta'_2\gamma''_2 - \beta''_2\gamma'_2}{\gamma'^2_2}\nu\right)s}\left(\mathcal{U}_2\right)_F\right\} \quad , \tag{267}$$

car, ici,

$$f \sim \frac{1}{\left|\alpha^*_{2(0)}\right|}\sqrt{\frac{\beta'_2}{\gamma'_2}\nu} \quad , \quad s \to \infty \quad . \tag{268}$$

Pour $u \leq u_F$, l'oscillation limite correspondante a donc une pulsation réduite

$$\nu_L \sim \nu_F + \frac{\beta'_2\gamma''_2 - \beta''_2\gamma'_2}{\gamma'^2_2}\nu \quad , \quad \nu \to 0 \quad , \tag{269}$$

et une amplitude fixe

$$\mathcal{A}_L \sim 2\sqrt{\frac{\beta'_2}{\gamma'_2}\nu}\,.\left(\mathcal{M}_2\right)_F \quad , \quad \nu \to 0 \quad , \tag{270}$$

en posant, $\left(m_{2i}\right)_F$ étant le ième élément de la matrice-colonne $\left(\mathcal{M}_2\right)_F$,

$$\left(m_{2i}\right)_F = \left|\left(u_{2i}\right)_F\right| \tag{271}$$

et

$$\left(a_i\right)_L = \mathrm{am}\left(w_i\right)_L \quad . \tag{272}$$

Pour toutes les conditions initiales telles que $\left|\alpha^*_{2(0)}\right| < \sqrt{\frac{\beta'_2}{\gamma'_2}\nu}$, la solution w_l ($l = 1, \ldots, 4$) du système étudié tend, quand s devient infini par valeurs positives, vers cette solution périodique, lorsque u n'est pas supérieur à u_F et que ν tend vers zéro (c'est-à-dire que u tend vers u_F à gauche) ; la "pseudo-amplitude" du mouvement tend alors vers l'amplitude limite par va-

leurs croissantes ; ceci est valable tant que l'approximation du troisième ordre reste permise (cf. § 2.3.2.2.2) ; dans les mêmes circonstances, mais pour toutes les conditions initiales telles que $\left|\alpha^{*}_{2(0)}\right| > \sqrt{\frac{\beta'_2}{\gamma'_2}\nu}$, la solution du système étudié tend vers la solution périodique, la "pseudo-amplitude" du mouvement tendant vers l'amplitude limite par valeurs décroissantes.

Si β'_2 est positif, la position d'équilibre $w_k = 0$ ($k = 1, \ldots, 4, 5$) est asymptotiquement stable par rapport aux w_l ($l = 1, \ldots, 4$) pour $u \leqslant u_F$ et instable pour $u > u_F$. Cependant, si $u \geqslant u_F$, il existe, comme précédemment, un cycle limite stable qui peut s'écrire, lorsque u tend vers u_F (à droite) :

$$\mathcal{W}_L \sim 2\sqrt{-\frac{\beta'_2}{\gamma'_2}\nu}\,.\,\mathcal{R}e\left\{e^{j\left(\nu_F - \frac{\beta'_2\gamma''_2 - \beta''_2\gamma'_2}{\gamma'_2}\nu\right)s}\left(\mathcal{U}_2\right)_F\right\} , \qquad (273)$$

car, ici,

$$f \sim \frac{1}{\left|\alpha^{*}_{2(0)}\right|}\sqrt{-\frac{\beta'_2}{\gamma'_2}\nu} \quad , \quad s \to \infty \quad . \qquad (274)$$

Pour $u \geqslant u_F$, l'oscillation limite correspondante a donc une pulsation réduite

$$\nu_L \sim \nu_F - \frac{\beta'_2\gamma''_2 - \beta''_2\gamma'_2}{\gamma'_2}\nu \quad , \quad \nu \to 0 \quad , \qquad (275)$$

et une amplitude fixe

$$\mathcal{A}_L \sim 2\sqrt{-\frac{\beta'_2}{\gamma'_2}\nu}\,.\left(\mathcal{M}_2\right)_F \quad , \quad \nu \to 0 \quad , \qquad (276)$$

avec les définitions (271) et (272). Pour toutes les conditions initiales vérifiant $\left|\alpha^{*}_{2(0)}\right| < \sqrt{-\frac{\beta'_2}{\gamma'_2}\nu}$, la solution w_l ($l = 1, \ldots, 4$) du système étudié tend vers cette solution périodique, lorsque u n'est pas inférieur à u_F et qu'il tend vers cette valeur (c'est-à-dire que u tend vers u_F à droite) ;

la "pseudo-amplitude" du mouvement tend alors vers l'amplitude limite par valeurs croissantes ; ceci est valable tant que l'approximation du troisième ordre reste permise (cf. § 2.3.2.2.2) ; dans les mêmes circonstances, mais pour toutes les conditions initiales vérifiant $\left|\alpha^{*}_{2(0)}\right| > \sqrt{-\frac{\beta'_2}{\gamma'_2}V}$, la solution du système étudié tend vers la solution périodique, la "pseudo-amplitude" du mouvement tendant vers l'amplitude limite par valeurs décroissantes.

Cas 2 : $\gamma'_2 \geq 0$.

Les fonctions f et g ne sont définies et continues pour toutes les valeurs de $s \geqslant 0$ que si l'on a $\left|\alpha^{*}_{2(0)}\right|^2 < \sigma\frac{\beta'_2}{\gamma'_2}V$ et $\sigma\beta'_2 > 0$; elles ont alors d'ailleurs des limites finies lorsque s tend vers l'infini. Dans les autres cas, elles ne sont définies et continues que pour les valeurs de $s < s_a$ (s_a , alors positive, est donnée par l'expression (256)) ; par ailleurs, elles tendent vers l'infini par valeurs positives lorsque s tend vers s_a à gauche. Le comportement de $\mathcal{W}_a$ dépend du signe de β'_2 et, éventuellement, de la valeur de $\left|\alpha_{2(0)}\right|$.

Si β'_2 est négatif, la position d'équilibre $w_k = 0$ ($k = 1, \ldots, 4, 5$) est asymptotiquement stable par rapport aux w_l ($l = 1, \ldots, 4$) pour $u > u_F$ et instable pour $u \leqslant u_F$. Par ailleurs, si $u \geqslant u_F$, il existe un cycle limite instable ; en effet, l'inégalité (258) est vérifiée et, si nous prenons des conditions initiales particulières telles que

$$\left|\alpha^{*}_{2(0)}\right| = \sqrt{-\frac{\beta'_2}{\gamma'_2}V} \quad , \tag{277}$$

nous trouvons que, pour s tendant vers l'infini, $\mathcal{W}_a$ est, lorsque u tend vers u_F (à droite), asymptotiquement équivalent à

$$\mathcal{W}_L \sim 2\sqrt{-\frac{\beta'_2}{\gamma'_2}V}\,.\,\mathcal{R}e\left\{e^{j\left(\nu_F - \frac{\beta'_2\gamma''_2 - \beta''_2\gamma'_2}{\gamma'^2_2}V\right)s}\left(\mathcal{U}_2\right)_F\right\} \quad ; \tag{278}$$

l'oscillation limite correspondante a donc une pulsation réduite

$$\nu_L \sim \nu_F - \frac{\beta_2'\gamma_2'' - \beta_2''\gamma_2'}{\gamma_2'}\nu \quad , \quad \nu \to 0 \quad , \tag{279}$$

et une amplitude fixe

$$\mathcal{A}_L \sim 2\sqrt{-\frac{\beta_2'}{\gamma_2'}\nu}\cdot\left(\mathcal{M}_2\right)_F \quad , \quad \nu \to 0 \quad , \tag{280}$$

avec les définitions (271) et (272). Pour toutes les conditions initiales telles que $\left|\alpha^*_{2(0)}\right| < \sqrt{-\frac{\beta_2'}{\gamma_2'}\nu}$, la solution w_l ($l = 1, \ldots, 4$) du système étudié tend, quand s devient infini par valeurs positives, vers zéro à partir de valeurs $\left|w_{l(0)}\right|$ inférieures à $\left(a_l\right)_L$, lorsque u n'est pas inférieur à u_F et qu'il tend vers cette valeur ; dans les mêmes circonstances, mais pour toutes les conditions initiales telles que $\left|\alpha^*_{2(0)}\right| > \sqrt{-\frac{\beta_2'}{\gamma_2'}\nu}$, la solution du système étudié devient infinie à partir de valeurs $\left|w_{l(0)}\right|$ supérieures à $\left(a_l\right)_L$; cependant, l'instabilité a lieu, fait important, en un temps fini Δs_1 donné par l'expression (256) c'est-à-dire

$$\Delta s_1 \sim -\frac{1}{2\beta_2'\nu}\operatorname{Log}\frac{\left|\alpha^*_{2(0)}\right|^2}{\frac{\beta_2'}{\gamma_2'}\nu + \left|\alpha^*_{2(0)}\right|^2} \quad , \quad \nu \to 0 \quad ; \tag{281}$$

le flottement est alors du type "explosif". Il est d'ailleurs à remarquer que l'instabilité de la position d'équilibre $w_{k=0}$ ($k = 1, \ldots, 4, 5$) par rapport aux w_l ($l = 1, \ldots, 4$), pour $u \leqslant u_F$, a lieu aussi en un temps fini Δs_2 donné par l'expression (256) c'est-à-dire

$$\Delta s_2 \sim \frac{1}{2\beta_2'\nu}\operatorname{Log}\frac{\left|\alpha^*_{2(0)}\right|^2}{-\frac{\beta_2'}{\gamma_2'}\nu + \left|\alpha^*_{2(0)}\right|^2} \quad , \quad \nu \to 0 \quad , \tag{282}$$

et le flottement est encore du type "explosif". Evidemment, tout ce qui précède n'est valable que dans la mesure où l'approximation du troisième ordre reste permise (cf. § 2.3.2.2.2).

Si β'_2 est positif, la position d'équilibre $w_k = 0$ ($k = 1, \ldots, 4, 5$) est asymptotiquement stable par rapport aux w_l ($l = 1, \ldots, 4$) pour $u < u_F$ et instable pour $u \geqslant u_F$. D'autre part, si $u \leqslant u_F$, il existe un cycle limite instable ; en effet, l'inégalité (258) est vérifiée et, si l'on prend des conditions initiales particulières telles que

$$\left|\alpha^{*}_{2(0)}\right| = \sqrt{\frac{\beta'_2}{\gamma'_2}\nu} \quad , \tag{283}$$

on trouve que, lorsque s tend vers l'infini, $\mathcal{W}_a$ est, pour u tendant vers u_F (à gauche), asymptotiquement équivalent à

$$\mathcal{W}_L \sim 2\sqrt{\frac{\beta'_2}{\gamma'_2}\nu}\,.\,\mathcal{R}e\left\{e^{j\left(\nu_F + \frac{\beta'_2\gamma''_2 - \beta''_2\gamma'_2}{\gamma'_2}\nu\right)s}\left(\mathcal{U}_2\right)_F\right\} \quad ; \tag{284}$$

l'oscillation limite correspondante a donc une pulsation réduite

$$\nu_L \sim \nu_F + \frac{\beta'_2\gamma''_2 - \beta''_2\gamma'_2}{\gamma'_2}\nu \quad , \quad \nu \to 0 \quad , \tag{285}$$

et une amplitude fixe

$$\mathcal{A}_L \sim 2\sqrt{\frac{\beta'_2}{\gamma'_2}\nu}\,.\left(\mathcal{M}_2\right)_F \quad , \quad \nu \to 0 \quad , \tag{286}$$

avec les définitions (271) et (272). Pour toutes les conditions initiales telles que $\left|\alpha^{*}_{2(0)}\right| < \sqrt{\frac{\beta'_2}{\gamma'_2}\nu}$, la solution w_l ($l = 1, \ldots, 4$) du système étudié tend vers zéro à partir de valeurs $\left|w_{l(0)}\right|$ inférieures à $\left(a_l\right)_L$, lorsque u n'est pas supérieur à u_F et qu'il tend vers cette valeur ; dans les mêmes circonstances, mais pour toutes les conditions initiales vérifiant $\left|\alpha^{*}_{2(0)}\right| > \sqrt{\frac{\beta'_2}{\gamma'_2}\nu}$, la solution du système étudié devient infinie à partir de valeurs $\left|w_{l(0)}\right|$ supérieures à $\left(a_l\right)_L$; cependant, l'instabilité s'accomplit en un temps fini Δs_l donné par l'expression (256) c'est-à-dire

$$\Delta s_1 \sim \frac{1}{2\beta_2' v} \operatorname{Log} \frac{\left|\alpha^*_{2(0)}\right|^2}{-\frac{\beta_2'}{\gamma_2'} v + \left|\alpha^*_{2(0)}\right|^2} \quad , \quad v \to 0 \quad ; \qquad (287)$$

le flottement est alors du type "explosif". Il est aussi à remarquer que l'instabilité de la position d'équilibre $w_k = 0$ ($k = 1, \ldots, 4, 5$) par rapport aux w_l ($l = 1, \ldots, 4$), pour $u \geqslant u_F$, s'accomplit aussi en un temps fini Δs_2 donné de même par l'expression (256) c'est-à-dire

$$\Delta s_2 \sim -\frac{1}{2\beta_2' v} \operatorname{Log} \frac{\left|\alpha^*_{2(0)}\right|^2}{\frac{\beta_2'}{\gamma_2'} v + \left|\alpha^*_{2(0)}\right|^2} \quad , \quad v \to 0 \quad , \qquad (288)$$

et le flottement est encore du type "explosif". Tout ce qui précède n'est manifestement valable que dans la mesure où l'approximation du troisième ordre est admissible (cf. § 2.3.2.2.2).

3.3.1.3.2.2.- Résumé.

Dans le cadre de l'approximation du troisième ordre et lorsque les inégalités (263) et (264) sont vérifiées, il existe toujours un cycle limite qui peut s'écrire :

$$W_L \sim \frac{2\sqrt{2}}{u_F} \sqrt{\frac{\beta_2'}{\gamma_2'}\left(1 - \frac{u}{u_F}\right)} \cdot \mathcal{R}e\left\{ e^{j\left[\nu_F + \frac{2}{u_F^2} \frac{\beta_2'\gamma_2'' - \beta_2''\gamma_2'}{\gamma_2'}\left(1 - \frac{u}{u_F}\right)\right] s} \left(v_{2}\right)_F \right\} \quad , \quad u \to u_F \quad ; \quad (289)$$

l'oscillation limite correspondante a donc une pulsation réduite

$$\nu_L \sim \nu_F + \frac{2}{u_F^2} \frac{\beta_2'\gamma_2'' - \beta_2''\gamma_2'}{\gamma_2'}\left(1 - \frac{u}{u_F}\right) \quad , \quad u \to u_F \quad , \qquad (290)$$

dont la courbe représentative locale en fonction de u est une droite, et, avec les définitions (271) et (272), une amplitude fixe

$$\mathcal{A}_{6_L} \sim \frac{2\sqrt{2}}{u_F}\sqrt{\frac{\beta_2'}{\gamma_2'}\left(1-\frac{u}{u_F}\right)}\cdot\left(M_2\right)_F \quad , \quad u \to u_F \quad , \tag{291}$$

dont la courbe représentative locale en fonction de u est une parabole d'axe u . Par ailleurs, dans le cas où la solution du système devient infinie lorsque s croît, c'est-à-dire quand $\gamma_2'>0$, cette instabilité rend la solution infinie en un temps fini qui dépend des conditions initiales :

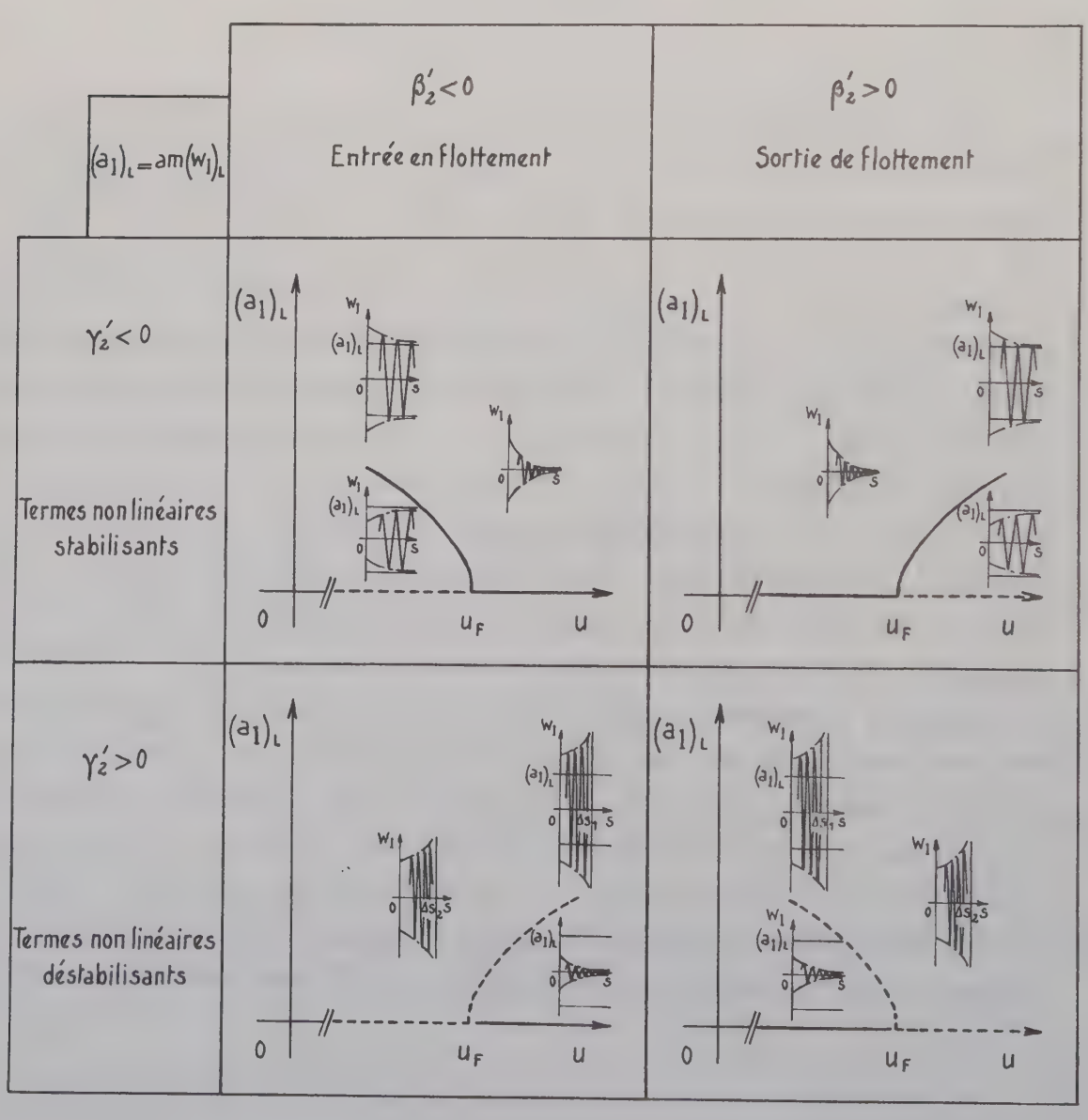
$$\Delta s \sim \frac{u_F^2}{4\beta_2'\left(1-\frac{u}{u_F}\right)} \operatorname{Log} \frac{\left|\alpha_{2(0)}^*\right|^2}{-\frac{2}{u_F^2}\frac{\beta_2'}{\gamma_2'}\left(1-\frac{u}{u_F}\right)+\left|\alpha_{2(0)}^*\right|^2} \quad , \quad u \to u_F \quad , \tag{292}$$

et le flottement est alors du type "explosif".

Plus précisément, si u_F correspond à la vitesse d'entrée en flottement, c'est-à-dire si $\beta_2'>0$, les termes non linéaires sont stabilisants ou déstabilisants suivant que γ_2' est négatif ou positif ; dans le premier cas, la solution d'équilibre est asymptotiquement stable pour la vitesse critique de flottement et, bien que cette position d'équilibre soit instable pour les vitesses supérieures à la vitesse critique de flottement, les perturbations, dans cette circonstance, conduisent à des oscillations limites stables ; dans le deuxième cas, la solution d'équilibre est instable pour la vitesse critique de flottement (alors qu'elle est stable en linéaire) et, pour les vitesses inférieures à la vitesse critique de flottement, le domaine de stabilité du système est limité par un cycle limite instable qui, sauf pour des conditions initiales particulières, n'est pas une oscillation qui apparaît physiquement. Si u_F correspond à une vitesse de sortie de flottement, c'est-à-dire si $\beta_2'<0$, les termes non linéaires sont encore stabilisants ou déstabilisants suivant que γ_2' est négatif ou positif ; dans le premier cas, la solution d'équilibre est asymptotiquement stable pour la vitesse de sortie de flottement et, bien que cette position d'équilibre soit instable pour les vitesses inférieures à la vitesse de sortie de flottement, les perturbations conduisent ici à des oscillations limites stables ; dans le deuxième cas, la solution d'équilibre est ins-

table pour la vitesse de sortie de flottement (alors qu'elle est stable dans le domaine linéaire) et, pour les vitesses supérieures à la vitesse de sortie de flottement, le domaine de stabilité du système est limité par un cycle limite instable qui, excepté pour des conditions initiales particulières, n'est qu'une séparatrice et non pas une solution périodique qui se présente physiquement. Enfin, lorsque γ_2' est positif, l'instabilité conduit, quel que soit le signe de β_2', à un flottement du type "explosif".

Les résultats qui précèdent sont indiqués dans les schémas ci-après qui illustrent les diverses réponses asymptotiques possibles du système étudié.



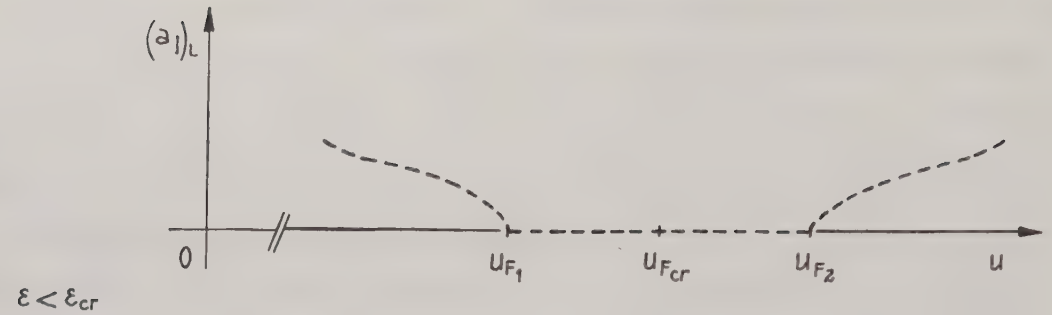
Dans le cadre des hypothèses déjà mentionnées, le paragraphe 3.3.1 répond aux questions posées dans l'introduction du paragraphe 3.3, pour le cas (I) où le flottement existe dans le domaine linéaire. Nous allons maintenant considérer un cas (II) particulier pour lequel la solution d'équilibre $w_k = 0$ est toujours asymptotiquement stable dans le domaine linéaire et étudier son comportement dans le domaine non linéaire, en supposant que l'approximation du troisième ordre reste toujours valable.

3.3.2.- Etude d'un système sans vitesse critique de flottement.

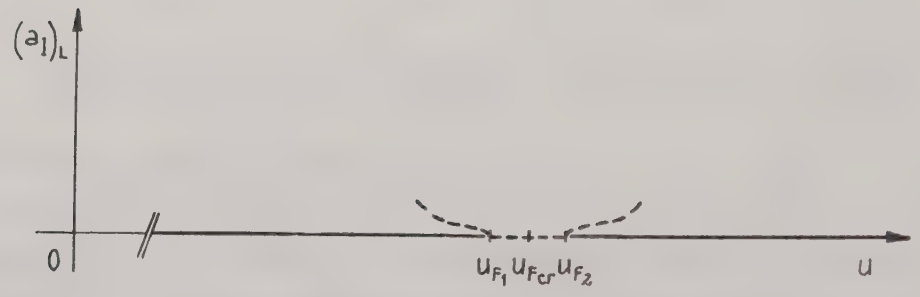
Dans ce qui suit, pour des raisons de simplicité pratique qui ne modifient pas le principe de l'étude, nous nous limiterons au cas où les deux facteurs d'amortissement structural, ε_δ et ε_θ , sont égaux, ce qui, d'ailleurs, ne s'écarte pas trop de la réalité, et nous poserons :

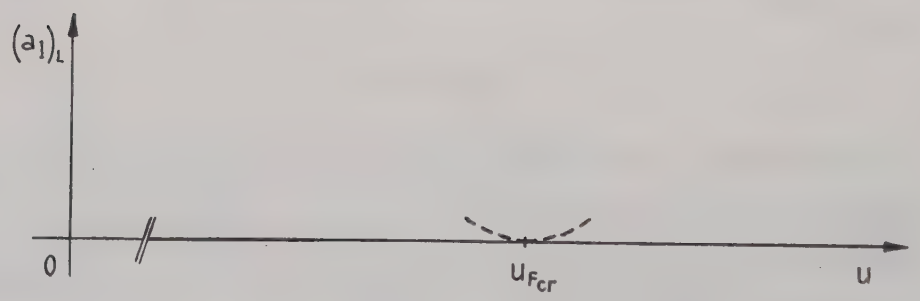
$$\varepsilon = \varepsilon_\delta = \varepsilon_\theta \quad . \tag{293}$$

Par ailleurs, nous considérerons un système pour lequel il existe, pour de petites valeurs positives de ε , une vitesse d'entrée en flottement U_{F_1} et une vitesse de sortie de flottement U_{F_2} telles que les termes non linéaires soient déstabilisants c'est-à-dire que nous ayons $(\gamma_2')_1$ et $(\gamma_2')_2$ positifs. Nous envisagerons alors le cas où, pour une certaine valeur ε_{cr} de ε , il existe une vitesse critique de flottement double $U_F = U_{F_{cr}}$ et nous étudierons plus particulièrement le comportement non linéaire du système quand ε tend vers ε_{cr} à droite, c'est-à-dire lorsqu'il ne se trouve plus de vitesse critique de flottement réelle au voisinage de $\varepsilon = \varepsilon_{cr}$. En faisant varier seulement la valeur de l'amortissement structural ε , nous pouvons donc provoquer et franchir une vitesse critique de flottement double, ce qui est illustré par les schémas représentés sur la page suivante.

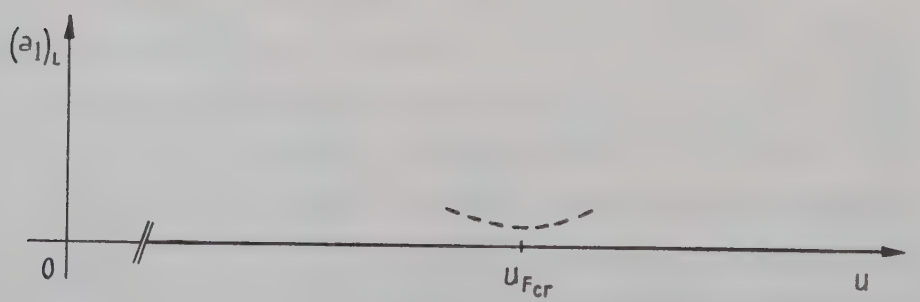


$\varepsilon < \varepsilon_{cr}$

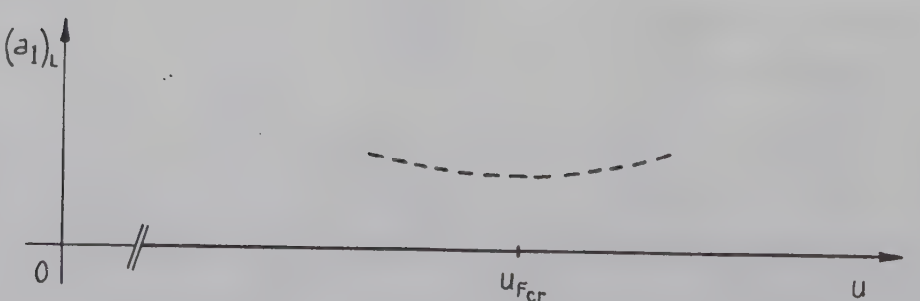




$\varepsilon = \varepsilon_{cr}$



$\varepsilon > \varepsilon_{cr}$



3.3.2.1.- Etude du système linéaire au voisinage de $\varepsilon = \varepsilon_{cr}$.

3.3.2.1.1.- Généralités.

En tenant compte des relations (293), les coefficients de l'équation caractéristique, donnés par les expressions (169), prennent la forme particulière suivante :

$$l_{1(u,\varepsilon)} = 2\left(\frac{a^2+r^2}{mr^2} + \frac{\varpi+1}{u}\varepsilon\right) \quad , \tag{294$_1$}$$

$$l_{2(u,\varepsilon)} = \frac{1-(1+2a)m}{m^2r^2} + 4\frac{a^2+\varpi r^2}{mr^2u}\varepsilon + \frac{(\varpi^2+1)+4\varpi\varepsilon^2}{u^2} \quad , \tag{294$_2$}$$

$$l_{3(u,\varepsilon)} = 2\left[-\frac{1+2a}{mr^2u}\varepsilon + \frac{a^2+\varpi^2r^2}{mr^2u^2} + \frac{\varpi(\varpi+1)}{u^3}\varepsilon\right] \quad , \tag{294$_3$}$$

$$l_{4(u,\varepsilon)} = \left(-\frac{1+2a}{mr^2} + \frac{\varpi^2}{u^2}\right)\frac{1}{u^2} \quad . \tag{294$_4$}$$

Rappelant que nous nous plaçons dans un cadre où la stabilité de la position d'équilibre est exclusivement déterminée par le signe de l'expression

$$\mathcal{D}_{(u,\varepsilon)} = (l_3 - l_1 l_2) l_3 + l_1^2 l_4 \quad , \tag{295}$$

qui peut s'écrire

$$\mathcal{D} = \frac{4}{u}\left(\frac{d_0}{u^5} + \frac{d_1}{u^4} + \frac{d_2}{u^3} + \frac{d_3}{u^2} + \frac{d_4}{u} + d_5\right) \quad , \tag{170}$$

les coefficients $d_{i(\varepsilon)}$, donnés par les formules (171), prennent, en tenant compte des relations (293), la forme particulière suivante :

$$d_{0(\varepsilon)} = -\left[(\varpi-1)^2 + 4\varpi\varepsilon^2\right](\varpi+1)^2\varpi\varepsilon^2 \quad , \tag{296$_1$}$$

$$d_{1(\varepsilon)} = -\frac{a^2+\varpi r^2}{mr^2}\left[(\varpi-1)^2 + 8\varpi\varepsilon^2\right](\varpi+1)^2\varepsilon \quad , \tag{296$_2$}$$

$$d_{2(\varepsilon)} = -\frac{1}{m^2r^4}\left[(\varpi^2-1)^2a^2r^2 + \left\{(\varpi+1)^2\left[4(a^2+\varpi r^2)^2 + \varpi r^2\right] + 4\varpi(a^2+r^2)(a^2+\varpi^2r^2) - 2\varpi(\varpi^2-1)(1+2a)mr^2\right\}\varepsilon^2 - 4\varpi(\varpi+1)(1+2a)mr^2\varepsilon^4\right] \quad , \tag{296$_3$}$$

$$d_{3(\varepsilon)} = -\frac{1}{m^3 r^6}\left\{\left[4\left(a^2+\varpi^2 r^2\right)\left(a^2+r^2\right)+\left(\varpi+1\right)^2 r^2\right]\left(a^2+\varpi r^2\right)-\left(\varpi^2-1\right)\left[2a^2+\left(\varpi+1\right)r^2\right]\left(1+2a\right)mr^2-\right.$$
$$\left.-4\left[\left(1+2\varpi\right)a^2+\left(2+\varpi\right)\varpi r^2\right]\left(1+2a\right)mr^2\varepsilon^2\right\}\varepsilon \quad , \tag{296$_4$}$$

$$d_{4(\varepsilon)} = \frac{1}{m^4 r^6}\left\{\left[\left(\varpi^2-1\right)\left(1+2a\right)mr^2-\left(a^2+\varpi^2 r^2\right)\right]\left(a^2+r^2\right)+\right.$$
$$\left.+\left[4\left(a^2+r^2\right)\left(a^2+\varpi r^2\right)+\left(\varpi+1\right)r^2-\varpi\left(1+2a\right)mr^2\right]\left(1+2a\right)m\varepsilon^2\right\} \quad , \tag{296$_5$}$$

$$d_{5(\varepsilon)} = \frac{1}{m^4 r^6}\left[1-\left(1+2a\right)m\right]\left(1+2a\right)\left(a^2+r^2\right)\varepsilon \quad . \tag{296$_6$}$$

Pour la suite, nous considérerons l'expression définie ci-après, qui est un polynôme entier par rapport à u et ε :

$$\mathcal{D}^{*}_{(u,\varepsilon)} = \frac{u^6}{4}\mathcal{D}_{(u,\varepsilon)} \quad ; \tag{297}$$

ordonné par rapport aux puissances décroissantes de u , ce polynôme s'écrit alors :

$$\mathcal{D}^{*}_{(u,\varepsilon)} = d_{5(\varepsilon)}u^5 + d_{4(\varepsilon)}u^4 + d_{3(\varepsilon)}u^3 + d_{2(\varepsilon)}u^2 + d_{1(\varepsilon)}u + d_{0(\varepsilon)} \quad . \tag{298}$$

Rappelons que les racines de l'équation entière par rapport à l'inconnue u

$$\mathcal{D}^{*}_{(u,\varepsilon)} = 0 \tag{299}$$

correspondent aux vitesses critiques de flottement, qui dépendent du facteur d'amortissement ε :

$$u = u_{F(\varepsilon)} \tag{300}$$

et que $\mathcal{D}^{*}$ est négatif (resp. positif) lorsque le système linéaire est stable (resp. instable). Nous allons d'abord étudier plus en détail le comportement de $\mathcal{D}^{*}$ au voisinage d'une racine double en u afin d'en déduire, pour ce cas, le comportement local de u_F en fonction de ε .

3.3.2.1.2.- Etude de $u_{F(\varepsilon)}$.

Si, pour $\varepsilon = \varepsilon_{cr}$, on a une racine double $u_F = u_{F_{cr}}$, c'est-à-dire si :

$$\mathcal{D}^*_{(u_{F_{cr}},\varepsilon_{cr})} = \frac{\partial \mathcal{D}^*}{\partial u}(u_{F_{cr}},\varepsilon_{cr}) = 0 \quad , \tag{301}$$

alors, au voisinage, on peut écrire :

$$\mathcal{D}^* \sim \frac{\partial \mathcal{D}^*}{\partial \varepsilon}(u_{F_{cr}},\varepsilon_{cr})\left(\varepsilon-\varepsilon_{cr}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathcal{D}^*}{\partial u^2}(u_{F_{cr}},\varepsilon_{cr})\left(u-u_{F_{cr}}\right)^2+\frac{\partial^2 \mathcal{D}^*}{\partial u\,\partial \varepsilon}(u_{F_{cr}},\varepsilon_{cr})\left(u-u_{F_{cr}}\right)\left(\varepsilon-\varepsilon_{cr}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathcal{D}^*}{\partial \varepsilon^2}(u_{F_{cr}},\varepsilon_{cr})\left(\varepsilon-\varepsilon_{cr}\right)^2+$$

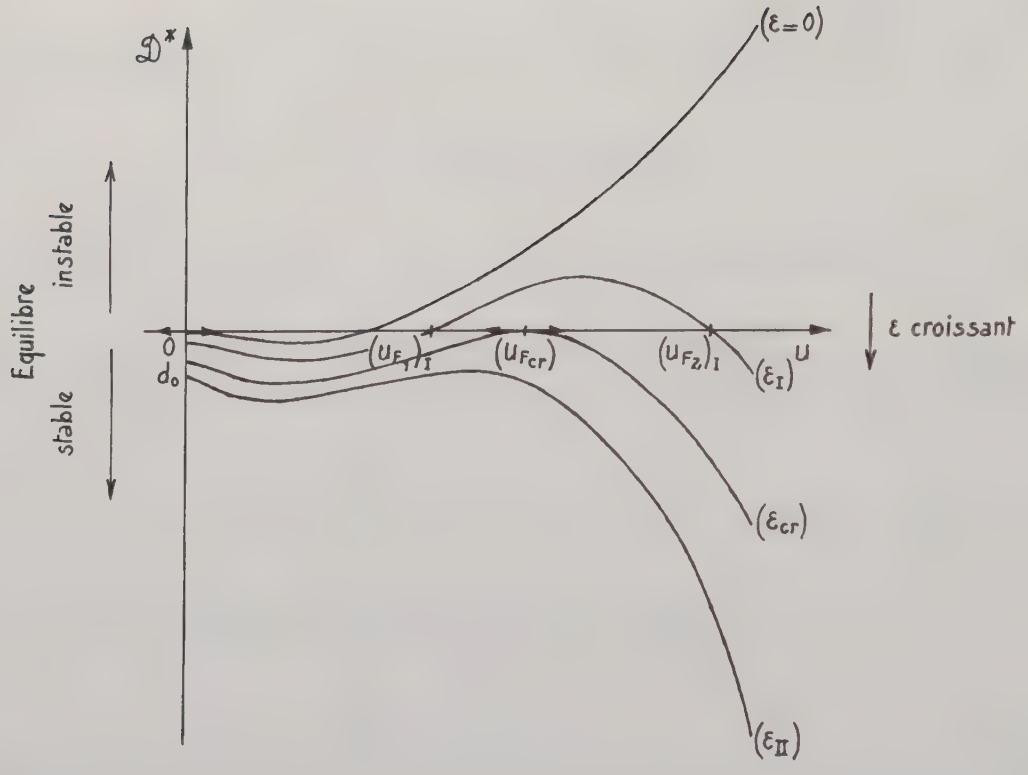
$$+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 \mathcal{D}^*}{\partial u^3}(u_{F_{cr}},\varepsilon_{cr})\left(u-u_{F_{cr}}\right)^3+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 \mathcal{D}^*}{\partial u^2\,\partial \varepsilon}(u_{F_{cr}},\varepsilon_{cr})\left(u-u_{F_{cr}}\right)^2\left(\varepsilon-\varepsilon_{cr}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 \mathcal{D}^*}{\partial u\,\partial \varepsilon^2}(u_{F_{cr}},\varepsilon_{cr})\left(u-u_{F_{cr}}\right)\left(\varepsilon-\varepsilon_{cr}\right)^2+$$

$$+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 \mathcal{D}^*}{\partial \varepsilon^3}(u_{F_{cr}},\varepsilon_{cr})\left(\varepsilon-\varepsilon_{cr}\right)^3 \tag{302}$$

et, en se plaçant dans le domaine complexe, on a les deux racines $u_{F(\varepsilon)}$ voisines de $u_{F_{cr}}$:

$$u_{F(\varepsilon)}-u_{F_{cr}} \sim \pm\sqrt{-2\frac{\dfrac{\partial \mathcal{D}^*}{\partial \varepsilon}}{\dfrac{\partial^2 \mathcal{D}^*}{\partial u^2}}(u_{F_{cr}},\varepsilon_{cr})\left(\varepsilon-\varepsilon_{cr}\right)+\frac{\dfrac{\partial^3 \mathcal{D}^*}{\partial u^3}\dfrac{\partial \mathcal{D}^*}{\partial \varepsilon}-3\dfrac{\partial^2 \mathcal{D}^*}{\partial u^2}\dfrac{\partial^2 \mathcal{D}^*}{\partial u\,\partial \varepsilon}}{3\left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{D}^*}{\partial u^2}\right)^2}(u_{F_{cr}},\varepsilon_{cr})\left(\varepsilon-\varepsilon_{cr}\right)} \quad . \tag{303}$$

Par ailleurs, nous situant, comme annoncé, dans le cas où, pour $0<\varepsilon<\varepsilon_{cr}$, la position d'équilibre est stable (donc $\mathcal{D}^*<0$) lorsque $0<u<u_{F_1}$, instable (donc $\mathcal{D}^*>0$) quand $u_{F_1}<u<u_{F_2}$ et redevient stable (donc $\mathcal{D}^*<0$) lorsque $u>u_{F_2}$ (au moins jusqu'à une valeur $u_M>u_{F_2}$), nous avons donc, par hypothèse :



$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{D}^*}{\partial \varepsilon}(u_{Fcr}, \varepsilon_{cr}) < 0 \ , & (304_1) \\ \dfrac{\partial^2 \mathcal{D}^*}{\partial u^2}(u_{Fcr}, \varepsilon_{cr}) < 0 \ , & (304_2) \end{cases}$$

ce qui nous permet de poser :

$$T_{cr} = \sqrt{2 \dfrac{\dfrac{\partial \mathcal{D}^*}{\partial \varepsilon}}{\dfrac{\partial^2 \mathcal{D}^*}{\partial u^2}}(u_{Fcr}, \varepsilon_{cr})} > 0 \ . \qquad (305)$$

Avec T_{cr} et R_{cr} réels, nous obtenons donc, dans le domaine complexe, lorsque ε tend vers ε_{cr} :

$$u_{F(\varepsilon)} - u_{Fcr} \sim \pm T_{cr} \sqrt{-(\varepsilon - \varepsilon_{cr})} + R_{cr}(\varepsilon - \varepsilon_{cr}) \ , \qquad (306)$$

R_{cr} étant défini directement à partir de la relation (303). D'après ce qui précède, on vérifie bien que, pour $\varepsilon > \varepsilon_{cr}$, il n'y a pas, au voisinage de $(u_{F_{cr}}, \varepsilon_{cr})$, de vitesse critique de flottement réelle.

Nous allons maintenant considérer le comportement local de $(\lambda_k)_F$ en fonction de ε ($k = 1, \ldots, 4$).

3.3.2.1.3.- Etude de $(\lambda_k)_{F(\varepsilon)}$.

En posant, λ_k étant a priori complexe,

$$(\lambda_k)_{F_{cr}} = \lambda_{k(u_{F_{cr}}, \varepsilon_{cr})} \quad , \tag{307}$$

nous avons, d'une façon générale, lorsque u et ε tendent respectivement vers $u_{F_{cr}}$ et ε_{cr} :

$$\lambda_{k(u,\varepsilon)} \sim (\lambda_k)_{F_{cr}} + \frac{\partial \lambda_k}{\partial u}(u_{F_{cr}}, \varepsilon_{cr})(u - u_{F_{cr}}) + \frac{\partial \lambda_k}{\partial \varepsilon}(u_{F_{cr}}, \varepsilon_{cr})(\varepsilon - \varepsilon_{cr}) +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \lambda_k}{\partial u^2}(u_{F_{cr}}, \varepsilon_{cr})(u - u_{F_{cr}})^2 + \frac{\partial^2 \lambda_k}{\partial u \partial \varepsilon}(u_{F_{cr}}, \varepsilon_{cr})(u - u_{F_{cr}})(\varepsilon - \varepsilon_{cr}) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \lambda_k}{\partial \varepsilon^2}(u_{F_{cr}}, \varepsilon_{cr})(\varepsilon - \varepsilon_{cr})^2 \quad ; \tag{308}$$

en particulier, pour $u = u_{F(\varepsilon)}$, il vient, lorsque ε tend vers ε_{cr} et en tenant compte de la relation (306) :

$$(\lambda_k)_{F(\varepsilon)} = (\lambda_k)_{(u_{F(\varepsilon)}, \varepsilon)} \sim (\lambda_k)_{F_{cr}} \pm \frac{\partial \lambda_k}{\partial u}(u_{F_{cr}}, \varepsilon_{cr}) T_{cr} \sqrt{-(\varepsilon - \varepsilon_{cr})} +$$

$$+ \left[\frac{\partial \lambda_k}{\partial u}(u_{F_{cr}}, \varepsilon_{cr}) R_{cr} + \frac{\partial \lambda_k}{\partial \varepsilon}(u_{F_{cr}}, \varepsilon_{cr}) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \lambda_k}{\partial u^2}(u_{F_{cr}}, \varepsilon_{cr}) T_{cr}^2\right](\varepsilon - \varepsilon_{cr}) \quad . \tag{309}$$

Soit alors $k = 2$ tel que, pour $u = u_{F(\varepsilon)}$ réel, $(\lambda_2)_{F(\varepsilon)} = j\nu_{F(\varepsilon)}$ ($\nu_{F(\varepsilon)}$: réel positif) ; par continuité, on a, dans ces conditions, $(\lambda_2)_{F_{cr}} = j\nu_{F_{cr}}$ ($\nu_{F_{cr}} = \nu_{F(\varepsilon_{cr})}$: réel positif). On peut alors écrire, pour le cas particulier $u = u_{F(\varepsilon)}$ réel, c'est-à-dire $\varepsilon \leq \varepsilon_{cr}$, et quand ε tend vers ε_{cr} :

$$j\gamma_{F(\varepsilon)} \sim j\gamma_{F_{cr}} \pm \frac{\partial \lambda_2}{\partial u}(u_{F_{cr}}, \varepsilon_{cr}) T_{cr} \sqrt{|\varepsilon - \varepsilon_{cr}|} +$$

$$+ \left[\frac{\partial \lambda_2}{\partial u}(u_{F_{cr}}, \varepsilon_{cr}) R_{cr} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial \varepsilon}(u_{F_{cr}}, \varepsilon_{cr}) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial u^2}(u_{F_{cr}}, \varepsilon_{cr}) T_{cr}^2 \right] (\varepsilon - \varepsilon_{cr}) \quad . \tag{310}$$

Le deuxième membre de la relation précédente doit être par conséquent imaginaire pur lorsque ε tend vers ε_{cr} à gauche. En posant, λ'_k et λ''_k étant réels,

$$\lambda_k = \lambda'_k + j\lambda''_k \quad , \tag{311}$$

ceci entraîne donc d'abord que, puisque T_{cr} est réel,

$$\frac{\partial \lambda'_2}{\partial u}(u_{F_{cr}}, \varepsilon_{cr}) = 0 \quad ; \tag{312}$$

par ailleurs, nous devons aussi avoir, en tenant compte du résultat précédent,

$$\frac{\partial \lambda'_2}{\partial \varepsilon}(u_{F_{cr}}, \varepsilon_{cr}) = \frac{1}{2} T_{cr} \frac{\partial^2 \lambda'_2}{\partial u^2}(u_{F_{cr}}, \varepsilon_{cr}) \quad . \tag{313}$$

Dans ces conditions, l'expression (308) pour $k=2$ se présente sous la forme suivante :

$$\lambda_{2(u,\varepsilon)} \sim j\gamma_{F_{cr}} + j \frac{\partial \lambda''_2}{\partial u}(u_{F_{cr}}, \varepsilon_{cr})(u - u_{F_{cr}}) + \frac{\partial \lambda'_2}{\partial \varepsilon}(u_{F_{cr}}, \varepsilon_{cr})(\varepsilon - \varepsilon_{cr}) + j \frac{\partial \lambda''_2}{\partial \varepsilon}(u_{F_{cr}}, \varepsilon_{cr})(\varepsilon - \varepsilon_{cr}) \quad , \quad (u, \varepsilon) \to (u_{F_{cr}}, \varepsilon_{cr}) \, . \tag{314}$$

Plus particulièrement, si nous nous déplaçons sur la droite d'équation

$$u = u_c^*(\varepsilon) \equiv u_{F_{cr}} - \mu_{F_{cr}}(\varepsilon - \varepsilon_{cr}) \quad , \tag{315}$$

avec :

$$\mu_{F_{cr}} = \frac{\dfrac{\partial \lambda''_2}{\partial \varepsilon}}{\dfrac{\partial \lambda''_2}{\partial u}}(u_{F_{cr}}, \varepsilon_{cr}) \quad , \tag{316}$$

nous obtenons, lorsque ε tend vers ε_{cr} :

$$\lambda_{2(u^*_{c(\varepsilon)},\varepsilon)} = j\nu_{F_{cr}} + \frac{\partial \lambda'_2}{\partial \varepsilon}(u_{F_{cr}},\varepsilon_{cr})\left(\varepsilon-\varepsilon_{cr}\right) + 0\left(\varepsilon-\varepsilon_{cr}\right)^2 , \tag{317}$$

c'est-à-dire :

$$\lambda''_{2(u^*_{c(\varepsilon)},\varepsilon)} = \nu_{F_{cr}} + 0\left(\varepsilon-\varepsilon_{cr}\right)^2 . \tag{318}$$

3.3.2.2.- Etude du système non linéaire au voisinage de $\varepsilon = \varepsilon_{cr}$.

3.3.2.2.1.- Formulation du problème.

Les matrices $\mathcal{W}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{C}$ étant toujours définies par les expressions (129), (145_1),(203) et (204), le système d'équations différentielles à étudier se présente sous la forme matricielle suivante :

$$\frac{d\mathcal{W}}{ds} + \left(\mathcal{A} + \frac{\varepsilon}{u}\mathcal{B}_1^{(1)} + \frac{1}{u^2}\mathcal{B}_2\right).\mathcal{W} = \mathcal{C}_{(\mathcal{W};u;\varepsilon)} \tag{319}$$

où l'on a posé, à partir de (203_2) :

$$\mathcal{B}_1 = \varepsilon.\mathcal{B}_1^{(1)} , \tag{320}$$

$\mathcal{B}_1^{(1)}$ étant indépendante de u et de ε . La condition initiale est encore exprimée par (147).

Nous considérons le cas où le système linéaire représenté par l'équation différentielle matricielle

$$\frac{d\mathcal{W}}{ds} + \left(\mathcal{A} + \frac{\varepsilon}{u}\mathcal{B}_1^{(1)} + \frac{1}{u^2}\mathcal{B}_2\right).\mathcal{W} = 0 \tag{321}$$

est :

- lorsque $0 < \varepsilon < \varepsilon_{cr}$, asymptotiquement stable pour les valeurs du paramètre $u > 0$ extérieures à l'intervalle fermé $\left[u_{F_1}, u_{F_2}\right]$ et instable dans cet intervalle (le système non linéaire présente donc deux cycles limites instables : l'un au voisinage à gauche de u_{F_1} et l'autre au voisinage à droite de u_{F_2}) ; les bornes distinctes u_{F_1} et u_{F_2} sont des valeurs critiques $u_{F(\varepsilon)}$ pour lesquelles la matrice carrée

$$\mathcal{M}_{(u;\varepsilon)} = \mathcal{A} + \frac{\varepsilon}{u}\mathcal{B}_1^{(1)} + \frac{1}{u^2}\mathcal{B}_2 \qquad (322)$$

a un couple de valeurs propres imaginaires pures opposées ;

- lorsque $\varepsilon_{cr} < \varepsilon$, asymptotiquement stable pour les valeurs du paramètre u intérieures à l'intervalle semi-ouvert à gauche d'origine $u = 0$ et d'extrêmité $u = u_M$ supérieure à une valeur u_{F_2}.

L'équation non linéaire (319) sera étudiée pour des valeurs de u et de ε voisines respectivement de $u_{F_{cr}}$ et de ε_{cr}, en utilisant toujours la méthode analytique dite d'échelles de temps multiples. Tout d'abord, cette équation différentielle permet d'écrire, lorsque $(u - u_{F_{cr}})$ et $(\varepsilon - \varepsilon_{cr})$ tendent vers zéro :

$$\frac{d\mathcal{W}}{ds} + \left(\mathcal{A} + \frac{\varepsilon_{cr}}{u_{F_{cr}}}\mathcal{B}_1^{(1)} + \frac{1}{u_{F_{cr}}^2}\mathcal{B}_2\right).\mathcal{W} \sim -\frac{1}{u_{F_{cr}}}\left\{\left[(\varepsilon - \varepsilon_{cr}) - \frac{\varepsilon_{cr}}{u_{F_{cr}}}(u - u_{F_{cr}})\right]\mathcal{B}_1^{(1)} - \frac{2}{u_{F_{cr}}^2}(u - u_{F_{cr}})\mathcal{B}_2\right\}.\mathcal{W} + \mathcal{C}_{(\mathcal{W};u_{F_{cr}};\varepsilon_{cr})} \quad . \quad (323)$$

Par ailleurs, nous ferons varier u et ε simultanément mais non indépendamment ; plus précisément, nous suivrons la variation de u et de ε le long d'un chemin rectiligne passant par le point $(u_{F_{cr}}, \varepsilon_{cr})$, c'est-à-dire nous considèrerons, μ étant arbitraire, que

$$u = u^*_{(\varepsilon)} \equiv u_{F_{cr}} - \mu(\varepsilon - \varepsilon_{cr}) \quad ; \qquad (324)$$

avec, par définition,

$$\mathcal{W}^*_{(s;\varepsilon,\mu)} = \mathcal{W}_{(s;u=u^*_{(\varepsilon)},\varepsilon)} \quad , \qquad (325)$$

l'équation différentielle (323) prend alors la forme :

$$\frac{d\mathcal{W}^*}{ds} + \left(\mathcal{A} + \frac{\varepsilon_{cr}}{u_{F_{cr}}}\mathcal{B}_1^{(1)} + \frac{1}{u_{F_{cr}}^2}\mathcal{B}_2\right).\mathcal{W}^* \sim -\frac{1}{u_{F_{cr}}}\left[\left(1 + \frac{\varepsilon_{cr}}{u_{F_{cr}}}\mu\right)\mathcal{B}_1^{(1)} + \frac{2}{u_{F_{cr}}^2}\mu\mathcal{B}_2\right].\mathcal{W}^*.(\varepsilon - \varepsilon_{cr}) + \mathcal{C}_{(\mathcal{W}^*;u_{F_{cr}},\varepsilon_{cr})} \quad , \quad \varepsilon \to \varepsilon_{cr} \quad , \quad (326)$$

et

$$\mathcal{W}_{(s;u,\varepsilon)} = \mathcal{W}^*_{\left(s;\varepsilon,\mu = -\frac{u - u_{F_{cr}}}{\varepsilon - \varepsilon_{cr}}\right)} \quad . \qquad (327)$$

Enfin, en posant :

$$v_\varepsilon = \left|\varepsilon - \varepsilon_{cr}\right| \geqslant 0 \quad , \tag{328$_1$}$$

$$\sigma_\varepsilon = sgn\left(\varepsilon - \varepsilon_{cr}\right) \tag{328$_2$}$$

et

$$\tilde{\mathcal{W}}^*_{(s;v_\varepsilon)} = \frac{1}{\sqrt{v_\varepsilon}} \mathcal{W}^*_{(s;\varepsilon - \varepsilon_{cr} + \sigma_\varepsilon v_\varepsilon)} \quad , \tag{329}$$

l'équation (326) donne, lorsque ε tend vers ε_{cr} :

$$\frac{d\tilde{\mathcal{W}}^*}{ds} + \left(\mathcal{A} + \frac{\varepsilon_{cr}}{u_{Fcr}} \mathcal{B}_1^{(1)} + \frac{1}{u_{Fcr}^2} \mathcal{B}_2\right).\tilde{\mathcal{W}}^* \sim \left\{ -\frac{\sigma_\varepsilon}{u_{Fcr}} \left[\left(1 + \frac{\varepsilon_{cr}}{u_{Fcr}}(\mu)\right)\mathcal{B}_1^{(1)} + \frac{2}{u_{Fcr}^2}(\mu \mathcal{B}_2\right].\tilde{\mathcal{W}}^* + \mathcal{C}\left(\tilde{\mathcal{W}}^*; u_{Fcr}, \varepsilon_{cr}\right) \right\} v_\varepsilon \quad . \tag{330}$$

Pour déterminer une solution approchée de l'équation différentielle (319), la matrice-colonne $\tilde{\mathcal{W}}^*_{(s;v_\varepsilon)}$ sera alors représentée, au voisinage de $v_\varepsilon = 0$, par un développement asymptotique par rapport à l'échelle de comparaison $v_\varepsilon^n \ (n \geqslant 0)$; plus précisément, nous nous limiterons à un développement à 2 termes et $\tilde{\mathcal{W}}^*$ prendra la forme suivante, $\mathcal{W}_0^*$ et $\mathcal{W}_1^*$ ne dépendant pas directement de v_ε :

$$\tilde{\mathcal{W}}^*_{(s;v_\varepsilon)} = \mathcal{W}^*_{0(s_0, s_1^*)} + v_\varepsilon \mathcal{W}^*_{1(s_0, s_1^*)} + 0\left(v_\varepsilon s_1^*\right) \quad , \tag{331}$$

où les différentes échelles de temps réduit s_0 et s_1^* telles que

$$\begin{cases} s_0 = s \quad , & (332_1) \\ s_1^* = v_\varepsilon s & (332_2) \end{cases}$$

sont considérées comme étant, avec v_ε , des variables indépendantes, ce qui entraîne

$$\frac{d}{ds} = \frac{\partial}{\partial s_0} + v_\varepsilon \frac{\partial}{\partial s_1^*} \quad ; \tag{333}$$

les fonctions $\mathcal{W}_{0(s_0,s_1^*)}^*$ et $\mathcal{W}_{1(s_0,s_1^*)}^*$ seront déterminées, par la suite, de façon à éviter l'apparition de termes séculaires dans la solution finale.

A partir des expressions (331) et (333), l'équation (330) s'écrit :

$$\frac{\partial \mathcal{W}_0^*}{\partial s_0}+\left(\mathcal{A}_0+\frac{\varepsilon_{cr}}{u_{F_{cr}}}\mathcal{B}_1^{(1)}+\frac{1}{u_{F_{cr}}^2}\mathcal{B}_2\right).\mathcal{W}_0^*+$$

$$+\left[\frac{\partial \mathcal{W}_1^*}{\partial s_0}+\left(\mathcal{A}_0+\frac{\varepsilon_{cr}}{u_{F_{cr}}}\mathcal{B}_1^{(1)}+\frac{1}{u_{F_{cr}}^2}\mathcal{B}_2\right).\mathcal{W}_1^*\right]v_\varepsilon=-\frac{\partial \mathcal{W}_0^*}{\partial s_1^*}v_\varepsilon+\left\{-\frac{\sigma_\varepsilon}{u_{F_{cr}}}\left[\left(1+\frac{\varepsilon_{cr}}{u_{F_{cr}}}\mu\right)\mathcal{B}_1^{(1)}+\frac{2}{u_{F_{cr}}^2}\mu\mathcal{B}_2\right].\mathcal{W}_0^*+\right.$$

$$\left.+\mathcal{C}_{(\mathcal{W}_0^*;u_{F_{cr}},\varepsilon_{cr})}\right\}v_\varepsilon+0\left(v_\varepsilon^2\right)\quad .\qquad (334)$$

En considérant les termes de même ordre en v_ε, nous obtenons alors le système suivant d'équations aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial \mathcal{W}_0^*}{\partial s_0}+\left(\mathcal{A}_0+\frac{\varepsilon_{cr}}{u_{F_{cr}}}\mathcal{B}_1^{(1)}+\frac{1}{u_{F_{cr}}^2}\mathcal{B}_2\right).\mathcal{W}_0^*=0\quad ,\qquad (335_1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}_1^*}{\partial s_0}+\left(\mathcal{A}_0+\frac{\varepsilon_{cr}}{u_{F_{cr}}}\mathcal{B}_1^{(1)}+\frac{1}{u_{F_{cr}}^2}\mathcal{B}_2\right).\mathcal{W}_1^*=-\frac{\partial \mathcal{W}_0^*}{\partial s_1^*}-\frac{\sigma_\varepsilon}{u_{F_{cr}}}\left[\left(1+\frac{\varepsilon_{cr}}{u_{F_{cr}}}\mu\right)\mathcal{B}_1^{(1)}+\frac{2}{u_{F_{cr}}^2}\mu\mathcal{B}_2\right].\mathcal{W}_0^*+\mathcal{C}_{(\mathcal{W}_0^*;u_{F_{cr}},\varepsilon_{cr})}\quad ,\qquad (335_2)$$

pour déterminer les deux fonctions $\mathcal{W}_0^*$ et $\mathcal{W}_1^*$ de s_0 et s_1^* .

3.3.2.2.2.- Résolution du problème.

3.3.2.2.2.1.- Terme d'ordre zéro.

Le système d'ordre zéro, équation (335_1), représente le problème du flottement linéaire pour $u=u_{F_{cr}}$ et $\varepsilon=\varepsilon_{cr}$; il a pour solution générale :

$$\mathcal{W}_0^*=\sum_{k=1}^{5}(\alpha_k)_{cr}\left(\mathcal{U}_k\right)_{F_{cr}}e^{(\lambda_k)_{F_{cr}}s_0}\quad ,\qquad (336)$$

où $(\lambda_k)_{F_{cr}}$ et $\left(\mathcal{U}_k\right)_{F_{cr}}$ sont respectivement les valeurs propres et les vecteurs propres-colonnes associés de la matrice carrée

$$\mathcal{M}_{F_{cr}} = \mathcal{A} + \frac{\varepsilon_{cr}}{u_{F_{cr}}} \mathcal{B}_1^{(1)} + \frac{1}{u_{F_{cr}}^2} \mathcal{B}_2 \tag{337}$$

et les $(\alpha_k)_{cr}$ sont des fonctions complexes de s_1^* . Parmi les valeurs propres, l'une ($k = 5$) est nulle, deux autres ($k = 1,3$) sont complexes conjuguées à partie réelle strictement négative et les deux autres ($k = 2,4$) sont imaginaires pures conjuguées de la forme $\pm j\nu_{F_{cr}}$; il est à remarquer que, si l'on considère la matrice carrée

$$\mathcal{M}_{cr(u)} = \mathcal{A} + \frac{\varepsilon_{cr}}{u} \mathcal{B}_1^{(1)} + \frac{1}{u^2} \mathcal{B}_2 \tag{338}$$

telle que

$$\mathcal{M}_{cr(u=u_{F_{cr}})} = \mathcal{M}_{F_{cr}} \quad , \tag{339}$$

ses valeurs propres

$$(\lambda_k)_{cr(u)} = \lambda_{k(u,\varepsilon=\varepsilon_{cr})} \tag{340}$$

sont, pour $k = 2,4$, telles que, d'après le paragraphe 3.3.2.1.3 :

$$\begin{cases} (\lambda'_k)_{cr(u=u_{F_{cr}})} = \lambda'_{k(u=u_{F_{cr}},\varepsilon=\varepsilon_{cr})} = (\lambda'_k)_{F_{cr}} = 0 \quad , & (341_1) \\ (\lambda''_k)_{cr(u=u_{F_{cr}})} = \lambda''_{k(u=u_{F_{cr}},\varepsilon=\varepsilon_{cr})} = (\lambda''_k)_{F_{cr}} = (-1)^{\frac{k}{2}+1} \nu_{F_{cr}} \quad , & (341_2) \end{cases}$$

$$\frac{d(\lambda'_k)_{cr}}{du}(u=u_{F_{cr}}) = \frac{\partial \lambda'_k}{\partial u}(u=u_{F_{cr}},\varepsilon=\varepsilon_{cr}) = 0 \tag{342}$$

et

$$(\lambda'_k)_{cr(u)} < 0 \tag{343}$$

dans le voisinage de $u = u_{F_{cr}}$.

La solution (336) peut être présentée sous la forme :

$$W_o^* = (\alpha_1)_{cr}(s_1^*)(\mathcal{U}_1)_{F_{cr}} e^{(\lambda_1)_{F_{cr}} s_o} + (\overline{\alpha_1})_{cr}(s_1^*)(\overline{\mathcal{U}_1})_{F_{cr}} e^{(\overline{\lambda_1})_{F_{cr}} s_o} + (\alpha_2)_{cr}(s_1^*)(\mathcal{U}_2)_{F_{cr}} e^{j\nu_{F_{cr}} s_o} + (\overline{\alpha_2})_{cr}(s_1^*)(\overline{\mathcal{U}_2})_{F_{cr}} e^{-j\nu_{F_{cr}} s_o} +$$

$$+ (\alpha_5)_{cr}(s_1^*)(\mathcal{U}_5)_{F_{cr}} , \qquad (344)$$

les vecteurs-colonnes $(\mathcal{U}_k)_{F_{cr}}$ ($k = 1, 2, 5$) étant donnés par les relations (175_1), (175_2) et (175_5) dans lesquelles l'indice F est remplacé par l'indice F_{cr} et $\nu_{F_{cr}}$ étant donné par l'expression

$$\nu_{F_{cr}}^2 = \frac{1}{u_{F_{cr}}^2} \frac{-\varepsilon(1+2a)u_{F_{cr}}^2 + (a^2 + \varpi^2 r^2)u_{F_{cr}} + \varepsilon m \varpi(\varpi+1) r^2}{(a^2+r^2)u_{F_{cr}} + \varepsilon m(\varpi+1) r^2} . \qquad (345)$$

3.3.2.2.2.2.- Terme d'ordre un.

Le développement présenté au début du paragraphe 3.3.1.2.2 pour la matrice-colonne $\mathcal{C}_{(W_o; u_F; \varepsilon_\theta)}$ restant valable pour la matrice-colonne $\mathcal{C}_{(W_o^*; u_{F_{cr}}, \varepsilon_{cr})}$, à condition de remplacer respectivement ε_θ , W_o , α_k , c_i , c_{ilmn}, h_{klmn} , g_{lmnpqr} par ε_{cr} , w_o^* , $(\alpha_k)_{cr}$, $(c_i)_{cr}$, $(c_{ilmn})_{cr}$, $(h_{klmn})_{cr}$, $(g_{lmnpqr})_{cr}$ et l'indice F par l'indice F_{cr}, nous pouvons écrire :

$$\mathcal{C}_{(W_o^*; u_{F_{cr}}, \varepsilon_{cr})} = \sum_{k=1}^{5} (\mathcal{C}_{1k})_{F_{cr}} (\alpha_k)_{cr} (\alpha_2)_{cr} (\overline{\alpha_2})_{cr} e^{(\lambda_k)_{F_{cr}} s_o} + \sum_{p,q,r=1}^{5} (\mathcal{C}_{2pqr})_{F_{cr}} e^{\left[(\lambda_p)_{F_{cr}} + (\lambda_q)_{F_{cr}} + (\lambda_r)_{F_{cr}}\right] s_o} . \qquad (346)$$

En tenant compte de cette expression, l'équation différentielle (335_2) prend la forme suivante :

$$\frac{\partial W_1^*}{\partial s_o} + \left(\mathcal{A} + \frac{\varepsilon_{cr}}{u_{F_{cr}}} \mathcal{B}_1^{(1)} + \frac{1}{u_{F_{cr}}^2} \mathcal{B}_2\right) W_1^* = \sum_{k=1}^{5} (\mathcal{F}_k)_{F_{cr}}(s_1^*) e^{(\lambda_k)_{F_{cr}} s_o} + \sum_{p,q,r=1}^{5} (\mathcal{C}_{2pqr})_{F_{cr}}(s_1^*) e^{\left[(\lambda_p)_{F_{cr}} + (\lambda_q)_{F_{cr}} + (\lambda_r)_{F_{cr}}\right] s_o} , \qquad (347)$$

dans laquelle $\left[(\lambda_p)_{F_{cr}} + (\lambda_q)_{F_{cr}} + (\lambda_r)_{F_{cr}}\right] \neq (\lambda_k)_{F_{cr}}$, pour chaque p , q , r et k , et :

$$\left(\mathcal{P}_k\right)_{F_{cr}} = -\left(\mathcal{U}_k\right)_{F_{cr}} \frac{d\left(\alpha_k\right)_{cr}}{ds_1^*} - \frac{\sigma_\varepsilon}{u_{F_{cr}}}\left[\left(1+\frac{\varepsilon_{cr}}{u_{F_{cr}}}\mu\right)\mathcal{B}_1^{(1)} + \frac{2}{u_{F_{cr}}^2}\mu\,\mathcal{B}_2\right]\cdot\left(\mathcal{U}_k\right)_{F_{cr}}\left(\alpha_k\right)_{cr} + \left(\mathcal{C}_{1k}\right)_{F_{cr}}\left(\alpha_k\right)_{cr}\left(\alpha_2\right)_{cr}\left(\overline{\alpha_2}\right)_{cr} \quad . \tag{348}$$

Si $\left(\mathcal{V}_k\right)_{F_{cr}}$ est le vecteur propre-ligne de $\mathcal{M}_{F_{cr}}$ associé à la valeur propre $\left(\lambda_k\right)_{F_{cr}}$ de $\mathcal{M}_{F_{cr}}$, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il n'y ait pas de terme séculaire dans la solution de (347) est :

$$\left(\mathcal{V}_i\right)_{F_{cr}}\cdot\left(\mathcal{P}_i\right)_{F_{cr}}(s_1^*) = 0 \quad , \quad i = 1,\ldots,5 \quad , \tag{349}$$

ou, en remplaçant $\left(\mathcal{P}_i\right)_{F_{cr}}$ par son expression (348) :

$$\frac{d\left(\alpha_i\right)_{cr}}{ds_1^*} + \sigma_\varepsilon\left(\beta_i\right)_{cr}\left(\alpha_i\right)_{cr} - \left(\gamma_i\right)_{cr}\left(\alpha_i\right)_{cr}\left(\alpha_2\right)_{cr}\left(\overline{\alpha}_2\right)_{cr} = 0 \quad , \quad i = 1,\ldots,5 \quad , \tag{350}$$

avec :

$$\left(\beta_i\right)_{cr} = \frac{\left(\mathcal{V}_i\right)_{F_{cr}}\cdot\left[\left(1+\frac{\varepsilon_{cr}}{u_{F_{cr}}}\mu\right)\mathcal{B}_1^{(1)} + \frac{2}{u_{F_{cr}}^2}\mu\,\mathcal{B}_2\right]\cdot\left(\mathcal{U}_i\right)_{F_{cr}}}{u_{F_{cr}}\left(\mathcal{V}_i\right)_{F_{cr}}\cdot\left(\mathcal{U}_i\right)_{F_{cr}}} \quad , \tag{351$_1$}$$

$$\left(\gamma_i\right)_{cr} = \frac{\left(\mathcal{V}_i\right)_{F_{cr}}\cdot\left(\mathcal{C}_{1i}\right)_{F_{cr}}}{\left(\mathcal{V}_i\right)_{F_{cr}}\cdot\left(\mathcal{U}_i\right)_{F_{cr}}} \quad . \tag{351$_2$}$$

L'ensemble des cinq équations différentielles (350) est littéralement identique à l'ensemble des cinq équations différentielles (232) étudié dans la deuxième moitié du paragraphe 3.3.1.2.2. Avec des modifications évidentes, la solution du système (350) est alors donnée par les expressions (245), (241) et (246) déjà obtenues et la solution générale de l'équation différentielle matricielle (347) s'exprime sous la forme suivante :

$$\mathcal{W}_1^{*} = \sum_{\substack{i,k=1 \\ i\neq k}}^{5} e^{(\lambda_k)_{F_{cr}} s_0} \frac{1}{(\lambda_k)_{F_{cr}} - (\lambda_i)_{F_{cr}}} \frac{(\mathcal{V}_i)_{F_{cr}} \left\{ -\frac{\sigma_\varepsilon}{u_{F_{cr}}} \left[\left(1 + \frac{\varepsilon_{cr}}{u_{F_{cr}}} \mu\right) \mathcal{B}_1^{(1)} + \frac{2}{u_{F_{cr}}^2} \mu \mathcal{B}_2 \right] \cdot (\mathcal{U}_k)_{F_{cr}} + (\mathcal{C}_{1k})_{F_{cr}} \left[(\alpha_2)_{cr} (\overline{\alpha_2})_{cr} \right] \right\} (\alpha_k)_{cr}}{(\mathcal{V}_i)_{F_{cr}} \cdot (\mathcal{U}_i)_{F_{cr}}} \cdot (\mathcal{U}_i)_{F_{cr}} +$$

$$+ \sum_{p,q,r=1}^{5} e^{\left[(\lambda_p)_{F_{cr}} + (\lambda_q)_{F_{cr}} + (\lambda_r)_{F_{cr}}\right] s_0} \left\{ \left[(\lambda_p)_{F_{cr}} + (\lambda_q)_{F_{cr}} + (\lambda_r)_{F_{cr}} \right] \mathcal{J} + \mathcal{M}_{F_{cr}} \right\}^{-1} \cdot (\mathcal{C}_{2pqr})_{F_{cr}(s_1^{*})} + \sum_{k=1}^{5} e^{(\lambda_k)_{F_{cr}} s_0} r_{k(s_1^{*})} (\mathcal{U}_k)_{F_{cr}} , \quad (352)$$

avec $\left[(\lambda_p)_{F_{cr}} + (\lambda_q)_{F_{cr}} + (\lambda_r)_{F_{cr}} \right] \neq (\lambda_k)_{F_{cr}}$ pour chaque p , q , r et k .

Pour les raisons présentées à la fin du paragraphe 3.3.1.2.2, nous ne considérerons, dans la suite, que la partie principale de $\tilde{\mathcal{W}}^{*}$ par rapport à v_ε c'est-à-dire $\mathcal{W}_o^{*}$.

3.3.2.2.2.3.- Partie principale.

Finalement, en utilisant les relations (329), (331), (332) et (344), la solution transitoire $\mathcal{W}^{*}$ de l'équation (326) est asymptotiquement équivalente, pour v_ε tendant vers zéro, à

$$\mathcal{W}_p^{*} = 2\,\mathcal{R}e \left\{ (\alpha_1)_{cr(s_1^{*} - v_\varepsilon s)}^{*} e^{(\lambda_1)_{F_{cr}} s} (\mathcal{U}_1)_{F_{cr}} + (\alpha_2)_{cr(s_1^{*} = v_\varepsilon s)}^{*} e^{j v_{F_{cr}} s} (\mathcal{U}_2)_{F_{cr}} \right\} + (\alpha_5)_{cr(s_1^{*} - v_\varepsilon s)}^{*} (\mathcal{U}_5)_{F_{cr}} , \quad (353)$$

en posant :

$$(\alpha_k)_{cr}^{*} = \sqrt{v_\varepsilon}\, (\alpha_k)_{cr} . \quad (354)$$

La condition initiale (147) est satisfaite par les relations (253) et (254) avec des modifications évidentes.

3.3.2.2.3.- Analyse de la solution : comportement de $\mathcal{W}_{(s, v_\varepsilon)}^{*}$.

Le développement de l'étude étant analogue à celui qui a été exposé

dans le paragraphe 3.3.1.3.2, seuls les points principaux seront repris ici.

Nous pouvons écrire :

$$W^{*}_{\sim 2} \mathcal{R}e\left\{ \left|(\alpha_1)^{*}_{cr(0)}\right| e^{\left[(\lambda'_1)_{F_{cr}} + \sigma_\varepsilon \frac{(\beta'_2)_{cr}(\gamma'_1)_{cr} - (\beta'_1)_{cr}(\gamma'_2)_{cr}}{(\gamma'_2)_{cr}} v_\varepsilon\right] s} \frac{(\gamma'_1)_{cr}}{(\gamma'_2)_{cr}} F^{*}_{cr(s;v_\varepsilon)} e^{j\left[(\lambda''_1)_{F_{cr}} s + \sigma_\varepsilon \frac{(\beta'_2)_{cr}(\gamma''_1)_{cr} - (\beta''_1)_{cr}(\gamma'_2)_{cr}}{(\gamma'_2)_{cr}} v_\varepsilon s + \frac{(\gamma''_1)_{cr}}{(\gamma'_1)_{cr}} \operatorname{Log} f^{* \frac{(\gamma'_1)_{cr}}{(\gamma'_2)_{cr}}}_{cr(s;v_\varepsilon)} + \arg(\alpha_1)^{*}_{cr(0)}\right]} (\mathcal{U}_0)_{F_{cr}} + \right.$$

$$+ \left|(\alpha_2)^{*}_{cr(0)}\right| F^{*}_{cr(s;v_\varepsilon)} e^{j\left[v_{F_{cr}} s + \sigma_\varepsilon \frac{(\beta'_2)_{cr}(\gamma''_2)_{cr} - (\beta''_2)_{cr}(\gamma'_2)_{cr}}{(\gamma'_2)_{cr}} v_\varepsilon s + \frac{(\gamma''_2)_{cr}}{(\gamma'_2)_{cr}} \operatorname{Log} f^{*}_{cr(s;v_\varepsilon)} + \arg(\alpha_2)^{*}_{cr(0)}\right]} (\mathcal{U}_0)_{F_{cr}} \Bigg\} +$$

$$+ (\alpha_5)^{*}_{cr(0)} e^{\sigma_\varepsilon \frac{(\beta'_2)_{cr}(\gamma'_5)_{cr}}{(\gamma'_2)_{cr}} v_\varepsilon s} F^{* \frac{(\gamma'_5)_{cr}}{(\gamma'_2)_{cr}}}_{cr(s;v_\varepsilon)} (\mathcal{U}_0)_{F_{cr}} \quad , \quad v_\varepsilon \to 0 \quad , \tag{355}$$

sachant que $F^{*}_{cr(s;v_\varepsilon)}$ est définie par l'expression suivante :

$$F^{*}_{cr(s;v_\varepsilon)} = \left\{ \frac{\sigma_\varepsilon \frac{(\beta'_2)_{cr}}{(\gamma'_2)_{cr}} v_\varepsilon}{\left[\sigma_\varepsilon \frac{(\beta'_2)_{cr}}{(\gamma'_2)_{cr}} v_\varepsilon - \left|(\alpha_2)^{*}_{cr(0)}\right|^2\right] e^{2\sigma_\varepsilon (\beta'_2)_{cr} v_\varepsilon s} + \left|(\alpha_2)^{*}_{cr(0)}\right|^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{356}$$

et que $(\beta_i)_{cr}$ est une fonction linéaire de $\mu = -\frac{U - U_{F_{cr}}}{\varepsilon - \varepsilon_{cr}}$, ce qui permet de poser :

$$(\beta_i)_{cr} = (\beta_i)^{(1)}_{cr} + (\beta_i)^{(0)}_{cr} \cdot \mu \quad . \tag{357}$$

En remarquant que, dans le cas particulier linéaire, nous avons $(\gamma_1)_{cr} = 0$, il vient alors, à partir de l'expression (262) :

$$\lambda_2 \sim -\sigma_\varepsilon (\beta'_2)_{cr} v_\varepsilon + j\left[v_{F_{cr}} - \sigma_\varepsilon (\beta''_2)_{cr} v_\varepsilon\right] \quad , \quad v_\varepsilon \to 0 \quad , \tag{358}$$

c'est-à-dire, en utilisant les définitions (324), (328) et (357) :

$$\lambda_2 \sim \left(\beta_2'\right)_{cr}^{(0)}\left(u-u_{F_{cr}}\right)-\left(\beta_2'\right)_{cr}^{(1)}\left(\varepsilon-\varepsilon_{cr}\right)+j\left[\gamma_{F_{cr}}+\left(\beta_2''\right)_{cr}^{(0)}\left(u-u_{F_{cr}}\right)-\left(\beta_2''\right)_{cr}^{(1)}\left(\varepsilon-\varepsilon_{cr}\right)\right] \quad , \quad (u,\varepsilon)\longrightarrow\left(u_{F_{cr}},\varepsilon_{cr}\right); \tag{359}$$

mais, la relation (312) nous donne :

$$\left(\beta_2'\right)_{cr}^{(0)}=0 \tag{360}$$

et $\left(\beta_2'\right)_{cr}$ est donc indépendant de μ. Par ailleurs, la condition

$$\frac{\partial \lambda_2'}{\partial \varepsilon}\left(u_{F_{cr}},\varepsilon_{cr}\right)<0 \tag{361}$$

entraîne

$$\left(\beta_2'\right)_{cr}^{(1)}>0 \tag{362}$$

et, en tenant compte de (360), nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\left(\beta_2'\right)_{cr}>0 \quad . \tag{363}$$

Enfin, rappelons que (cf. début du paragraphe 3.3.2) nous nous sommes placés dans le cas où :

$$\left(\gamma_2'\right)_{cr}>0 \tag{364}$$

et que $\left(\gamma_2'\right)_{cr}$ est indépendant de μ.

Dans ces conditions, la position d'équilibre $w_k=0$ ($k = 1, \ldots, 4, 5$) est, par rapport aux w_l ($l = 1, \ldots, 4$), asymptotiquement stable pour $\varepsilon > \varepsilon_{cr}$ et instable pour $\varepsilon \leqslant \varepsilon_{cr}$, sur un petit intervalle de u comprenant $u_{F_{cr}}$. D'autre part, si $\varepsilon \geqslant \varepsilon_{cr}$, il existe un cycle limite instable ; en effet, l'inégalité

$$\sigma_\varepsilon\left(\beta_2'\right)_{cr}\left(\gamma_2'\right)_{cr}>0 \tag{365}$$

est vérifiée et, si l'on prend des conditions initiales telles que

$$\left|(\alpha_2)^*_{cr(0)}\right| = \sqrt{\frac{(\beta'_2)_{cr}}{(\gamma'_2)_{cr}}(\varepsilon-\varepsilon_r)} \quad , \tag{366}$$

on trouve que, lorsque s tend vers l'infini, l'expression $\mathcal{W}_a^*$ équivalente à $\mathcal{W}_a$ (cf. (266)) est, pour ε tendant vers ε_{cr}(à droite), asymptotiquement équivalente à (cf. (284)) :

$$\mathcal{W}_L^* \sim 2\sqrt{\frac{(\beta'_2)_{cr}}{(\gamma'_2)_{cr}}(\varepsilon-\varepsilon_{cr})}\cdot \mathcal{R}e\left\{e^{j\left[\nu_{F_{cr}}+\frac{(\beta'_2)_{cr}(\gamma''_2)_{cr}-(\beta''_2)_{cr}(\gamma'_2)_{cr}}{(\gamma'_2)_{cr}}(\varepsilon-\varepsilon_{cr})\right]s}(\mathcal{U}_2)_{F_{cr}}\right\} \quad ; \tag{367}$$

l'oscillation limite correspondante a donc une pulsation réduite

$$\nu_L^* \sim \nu_{F_{cr}} + \frac{(\beta'_2)_{cr}(\gamma''_2)_{cr}-(\beta''_2)_{cr}(\gamma'_2)_{cr}}{(\gamma'_2)_{cr}}(\varepsilon-\varepsilon_{cr}) \quad , \quad \varepsilon \longrightarrow \varepsilon_{cr} \quad , \tag{368}$$

qui dépend de μ par l'intermédiaire de $(\beta''_2)_{cr}$, et une amplitude fixe

$$\mathcal{A}_L^* \sim 2\sqrt{\frac{(\beta'_2)_{cr}}{(\gamma'_2)_{cr}}(\varepsilon-\varepsilon_{cr})}\cdot(\mathcal{M}_2)_{F_{cr}} \quad , \quad \varepsilon \longrightarrow \varepsilon_{cr} \quad , \tag{369}$$

indépendante de μ ; dans la relation précédente, nous avons posé, $(m_{2i})_{F_{cr}}$ étant le ième élément de la matrice-colonne $(\mathcal{M}_2)_{F_{cr}}$,

$$(m_{2i}) = \left|(u_{2i})_{F_{cr}}\right| \tag{370}$$

et

$$(a_i)^*_L = am(w_i)^*_L \quad . \tag{371}$$

En revenant aux deux variables indépendantes u et ε , l'oscillation limite a donc une pulsation réduite :

$$\nu_L \sim \nu_{F_{cr}} + \left(\beta_2''\right)_{cr}^{(0)}\left(u-u_{F_{cr}}\right) + \frac{\left(\beta_2'\right)_{cr}\left(\gamma_2''\right)_{cr} - \left(\beta_2''\right)_{cr}^{(1)}\left(\gamma_2'\right)_{cr}}{\left(\gamma_2'\right)_{cr}}\left(\varepsilon-\varepsilon_{cr}\right) \quad , \quad \left(u,\varepsilon\right) \to \left(u_{F_{cr}},\varepsilon_{cr}\right) , \quad (372)$$

qui dépend de $\left(u-u_{F_{cr}}\right)$ et de $\left(\varepsilon-\varepsilon_{cr}\right)$, et une amplitude fixe

$$\mathcal{A}_L \sim 2\sqrt{\frac{\left(\beta_2'\right)_{cr}}{\left(\gamma_2'\right)_{cr}}\left(\varepsilon-\varepsilon_{cr}\right).\left(\mathcal{M}_2\right)_{F_{cr}}} \quad , \quad \left(u,\varepsilon\right) \to \left(u_{F_{cr}},\varepsilon_{cr}\right) , \quad (373)$$

dont la partie principale est indépendante de $\left(u-u_{F_{cr}}\right)$. Pour toutes les conditions initiales telles que $\left|\left(\alpha_2\right)_{cr(0)}^{*}\right| < \sqrt{\frac{\left(\beta_2'\right)_{cr}}{\left(\gamma_2'\right)_{cr}}\left(\varepsilon-\varepsilon_{cr}\right)}$, la solution w_l ($l = 1, \ldots, 4$) du système étudié tend, quand s devient infini par valeurs positives, vers zéro à partir de valeurs $\left|w_{l(0)}\right|$ inférieures à $\left(a_l\right)_L$, lorsque ε n'est pas inférieur à ε_{cr} et qu'il tend vers cette valeur en même temps que u tend vers $u_{F_{cr}}$; dans les mêmes circonstances, mais pour toutes les conditions initiales vérifiant l'inégalité $\left|\left(\alpha_2\right)_{cr(0)}^{*}\right| > \sqrt{\frac{\left(\beta_2'\right)_{cr}}{\left(\gamma_2'\right)_{cr}}\left(\varepsilon-\varepsilon_{cr}\right)}$, la solution du système étudié devient infinie à partir de valeurs $\left|w_{l(0)}\right|$ supérieures à $\left(a_l\right)_L$; cependant, l'instabilité s'accomplit en un temps fini Δs_1 dont la partie principale est indépendante de $\left(u-u_{F_{cr}}\right)$:

$$\Delta s_1 \sim \frac{1}{2\left(\beta_2'\right)_{cr}\left(\varepsilon-\varepsilon_{cr}\right)} \operatorname{Log} \frac{\left|\left(\alpha_2\right)_{cr(0)}^{*}\right|^2}{-\frac{\left(\beta_2'\right)_{cr}}{\left(\gamma_2'\right)_{cr}}\left(\varepsilon-\varepsilon_{cr}\right)+\left|\left(\alpha_2\right)_{cr(0)}^{*}\right|^2} \quad , \quad \left(u,\varepsilon\right) \to \left(u_{F_{cr}},\varepsilon_{cr}\right) \quad ; \quad (374)$$

le flottement est alors du type "explosif". Il est à remarquer que l'instabilité de la position d'équilibre $w_k = 0$ ($k = 1, \ldots, 4, 5$) par rapport aux w_l ($l = 1, \ldots, 4$), pour $\varepsilon \leqslant \varepsilon_{cr}$, s'accomplit aussi en un temps fini Δs_2 dont la partie principale est indépendante de $\left(u-u_{F_{cr}}\right)$:

$$\Delta s_2 \sim -\frac{1}{2\left(\beta'_2\right)_{cr}\left(\varepsilon-\varepsilon_{cr}\right)} \operatorname{Log} \frac{\left|\left(\alpha_2\right)^*_{cr}(0)\right|^2}{\frac{\left(\beta'_2\right)_{cr}}{\left(\gamma'_2\right)_{cr}}\left(\varepsilon-\varepsilon_{cr}\right)+\left|\left(\alpha_2\right)^*_{cr}(0)\right|^2} \quad , \quad (u,\varepsilon) \to \left(u_{F_{cr}},\varepsilon_{cr}\right), \quad (375)$$

et le flottement est encore du type "explosif".

En résumé, dans le cadre de l'approximation du troisième ordre et des conditions retenues, il existe un cycle limite instable, lorsque ε est supérieur à ε_{cr} et u voisin, à droite et à gauche, de $u_{F_{cr}}$. Les termes non linéaires sont déstabilisants puisque, par hypothèse, $\left(\gamma'_2\right)_{cr}$ est positif ; la solution d'équilibre est, en particulier, instable pour $u=u_{F_{cr}}$ et $\varepsilon=\varepsilon_{cr}$ (alors qu'elle est stable en linéaire) et, pour les valeurs du facteur d'amortissement structural ε supérieures à ε_{cr}, le domaine de stabilité du système est limité par un cycle limite instable ; il est à remarquer que, sauf pour des conditions initiales particulières, celui-ci n'est pas une oscillation qui apparaît physiquement. Lorsque ε est supérieur à ε_{cr}, alors que la solution d'équilibre $w_k=0$ est toujours asymptotiquement stable dans le domaine linéaire, elle devient instable dans le domaine non linéaire si les amplitudes initiales sont assez grandes pour que $\left|\left(\alpha_2\right)^*_{cr}(0)\right|$ soit supérieur à la valeur donnée par l'expression (366). Le paragraphe 3.3.2 répond donc à la question posée dans l'introduction du paragraphe 3.3 dans un cas (II) où il n'y a pas de vitesse critique de flottement.

Après avoir analysé théoriquement le problème de la stabilité, nous allons, dans le chapitre suivant, étudier numériquement quelques cas concrets d'application des résultats obtenus jusqu'ici sous forme littérale.

4.- APPLICATIONS NUMERIQUES

Dans ce chapitre, nous présenterons quelques résultats numériques d'application afin de quantifier certaines grandeurs intéressantes obtenues au chapitre 3. Les systèmes mécaniques entrant dans le cadre de cette étude pouvant être quantitativement très différents, nous ne présenterons que certains cas typiques afin de caractériser les conclusions importantes auxquelles nous avons abouti.

4.1.- Généralités.

A ce stade du développement, il semble intéressant de regrouper les principales hypothèses qui ont été utilisées et nous les rappelons ci-après :

- l'allongement de l'aile est infiniment grand ;
- la courbure du profil est nulle ;
- l'épaisseur du profil est infiniment petite ;
- le profil est indéformable ;
- l'aile travaille en flexion plane simple et en torsion plane ;
- dans les sections droites, le centre élastique et le centre de gravité sont confondus ($a = \xi_G$) ;
- le comportement interne de l'aile est celui d'un corps continu doué d'une visco-élasticité linéaire ;
- les facteurs d'amortissement structural sont égaux $(\varepsilon_\beta = \varepsilon_\theta = \varepsilon)$;
- le mouvement d'entraînement de l'aile est une translation rectiligne uniforme perpendiculairement à l'envergure ;
- l'angle de calage est nul $(\gamma_c = 0)$;
- les forces aérodynamiques instationnaires sont considérées dans l'hypothèse de quasi-stationnarité ;
- les forces d'inertie induites par le fluide sont négligeables vis-à-vis des forces d'inertie du profil (en particulier : $m \gg 1$).

Par ailleurs, le système est défini, vis-à-vis de l'extérieur et compte tenu des hypothèses précédentes, à l'aide des six paramètres sans dimension

$$m \ , \ r^2 \ , \ a \ , \ \varpi \ , \ \varepsilon \ , \ u$$

et des trois grandeurs

$$b \ , \ M \ , \ K_\delta \ (\text{ou } K_\theta) \ ;$$

d'autre part, son mouvement est déterminé en fonction de la variable sans dimension

$$s$$

reliée au temps t dès que l'on se donne la grandeur de la vitesse

$$U$$

Numériquement, nous ne ferons pas un balayage sur l'ensemble des six paramètres sans dimension cités précédemment, mais nous nous fixerons les valeurs de m et de r et nous envisagerons l'effet des variations de a , ϖ , ε et u. Plus précisément, nous retiendrons, dans toute la suite, les valeurs numériques suivantes :

$$\begin{cases} m = 20 \ , \\ r^2 = 0{,}25 \ ; \end{cases}$$

pratiquement, $m = 20$ peut correspondre, pour un avion de tourisme volant à une altitude comprise entre 1 600 m et 2 600 m en atmosphère standard (d'où : $\rho_0 = 1{,}0$ kg/m^3), à une aile ayant, extérieurement au fuselage, une envergure de 8 m et soit une masse de 180 kg (d'où : $M = 22{,}500$ kg/m) avec une corde, à 75 % de l'emplanture, de 1,2 m (d'où : $b = 0{,}6$ m), soit une masse de 125 kg (d'où : $M = 15{,}625$ kg/m) avec une corde, à 75 % de l'emplanture, de 1,0 m (d'où : $b = 0{,}5$ m). Par ailleurs, les valeurs de a qui ont été retenues pour l'étude numérique sont présentées dans le tableau suivant, en fonction de ϖ et de ε .

ϖ \ ε	0	0,02354	$\sim \varepsilon_{cr}$
3,0	- 0,400		
	- 0,300		
	+ 0,125		
0,5	- 0,600	- 0,600	- 0,600

Il est à remarquer que le cas $\varpi = 3$ correspond à une structure à revêtement travaillant, par exemple une structure-coque, alors que le cas $\varpi = 0,5$ correspond à une structure sans revêtement travaillant, par exemple une voilure à longerons indépendants, cette dernière construction ayant une très grande souplesse en torsion.

La limitation du nombre de cas envisagés est due essentiellement à la modicité des moyens matériels dont nous disposions, à savoir une machine à calculer mécanique de bureau.

Dans la suite, nous présenterons successivement les résultats obtenus pour $\varepsilon = 0$ et pour $\varepsilon \neq 0$. Pour ne pas alourdir l'exposé, nous ne donnerons que certains résultats caractéristiques se rattachant aux étapes principales des calculs et permettant la vérification de ceux-ci. Enfin, pour les grandeurs physiques, il ne sera fait usage que du système international d'unités de mesure S.I.

4.2.- Exemples sans amortissement structural : $\varepsilon = 0$.

Nous traiterons successivement les cas relatifs aux deux valeurs choisies pour le paramètre ϖ et, pour chacun de ces deux cas, l'étude du système linéarisé précèdera celle du système non linéaire.

4.2.1.- Cas $\varpi = 3,0$.

4.2.1.1.- Système linéarisé.

En fonction de a et de u, l'équation caractéristique du système prend la forme suivante :

$$\lambda\left[\lambda^4+\left(0,1+0,4.a^2\right)\lambda^3-\left(0,19+0,4.a-\frac{10}{u^2}\right)\lambda^2+\left(0,9+0,4.a^2\right)\frac{1}{u^2}\lambda-\left(0,2+0,4.a-\frac{9}{u^2}\right)\frac{1}{u^2}\right]=0 \qquad (376)$$

et les vitesses critiques de flottement et de divergence sont obtenues à partir du tableau ci-après.

a	u_F	u_D
- 0,400	10,568 714	15,000 000
- 0,300	5,568 221	10,606 602
+ 0,125	1,404 171	6,000 000

Par ailleurs, la valeur propre λ_2 correspondant à la vitesse critique de flottement est donnée par le tableau suivant, sachant que

$$\left(\lambda_2\right)_F = j\nu_F \quad . \qquad (174_2)$$

a	ν_F	$\frac{\omega_F}{\omega_\delta} = u_F \nu_F$
- 0,400	0,229 401	2,424 469
- 0,300	0,471 142	2,623 424
+ 0,125	2,079 887	2,920 516

Enfin, le vecteur propre-colonne $\mathcal{U}_2$ et le vecteur propre-ligne $\mathcal{V}_2$, correspondant à la vitesse critique de flottement, sont présentés respectivement dans les deux tableaux suivants.

a	- 0,400	- 0,300	+ 0,125	
$(\mathcal{U}_2)_F$	+ 0,301 250 - - 0,367 041 .J	+ 0,146 250 - - 0,212 014 .j	+ 0,045 313 - - 0,051 997 .j	
	+ 0,229 401 .j	+ 0,471 142 .j	+ 2,079 887 .j	
	- 1,600 000 - - 1,313 205 .j	- 0,450 000 - - 0,310 416 .j	- 0,025 000 - - 0,021 786 .j	k_2
	1	1	1	
	- 4,359 187 .j	- 2,122 501 .j	- 0,480 795 .j	

a	$(\mathcal{V}_2)_F$				
- 0,400	- 25,623 517 .j	- 121,951 224 + + 64,058 793 .j	1	- 22,500 000 - - 21,569 797 .j	0
- 0,300	- 14,607 803 .j	- 73,529 412 + + 18,259 754 .j	1	- 11,250 000 - - 32,816 837 .j	0
+ 0,125	- 4,100 903 .j	- 30,117 648 + + 1,640 361 .j	1	- 3,600 000 - - 62,477 254 .j	0

Il est alors possible, sachant que, ici,

$$\frac{U_F}{2}\mathcal{B}_1+\mathcal{B}_2=\mathcal{B}_2=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&9&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}, \qquad (377)$$

de présenter le tableau ci-après donnant la valeur du coefficient complexe β_2 en fonction du paramètre a.

a	$(V_2)_F.\mathcal{B}_2.(U_2)_F$	$(V_2)_F.(U_2)_F$	β_2
- 0,400	- 1 131,209 9 + 617,526 8 .j	- 48,200 0 - 58,577 8 .j	+ 3,188 9 - 16,687 3 .j
- 0,300	- 666,299 2 + 170,911 3 .j	- 23,400 0 - 69,906 5 .j	+ 0,670 5 - 9,306 9 .j
+ 0,125	- 271,148 2 + 14,865 8 .j	- 7,250 0 - 125,326 1 .j	+ 0,006 5 - 2,163 2 .j

Il est à remarquer que nous avons bien $\beta'_2=\mathcal{R}e\{\beta_2\}>0$ puisque U_F correspond à la vitesse critique d'entrée en flottement. D'autre part, le tableau suivant permet de vérifier numériquement que, pour le mode propre correspondant, par continuité, au mode de flexion, l'équilibre est toujours asymptotiquement stable pour $U=U_F$ puisque nous avons $(\lambda'_1)_F=\mathcal{R}e\{(\lambda_1)_F\}<0$;

a	$(\lambda_1)_F$	$(\nu_1)_F$	$\frac{(\omega_1)_F}{\omega_\delta} = u_F(\nu_1)_F$	$(\varepsilon_1)_F$
- 0,400	- 0,082 000 + + 0,013 368 .j	+ 0,083 083	+ 0,878 077	+ 0,986 97
- 0,300	- 0,068 000 + + 0,161 024 .j	+ 0,174 794	+ 0,973 289	+ 0,389 03
+ 0,125	- 0,053 125 + + 0,709 244 .j	+ 0,711 231	+ 0,998 690	+ 0,074 69

dans ce qui précède, nous avons posé :

$$(\nu_1)_F = \left|(\lambda_1)_F\right| = \sqrt{(\lambda_1')_F^2 + (\lambda_1'')_F^2} \quad , \tag{378$_1$}$$

$$(\varepsilon_1)_F = -\frac{(\lambda_1')_F}{\left|(\lambda_1)_F\right|} \quad . \tag{378$_2$}$$

4.2.1.2.- Système non linéaire.

A partir des résultats précédents, nous pouvons calculer le vecteur $(\mathcal{C}_{12})_F$, sachant que :

$$(c_{121})_F = (2k_2 - \bar{k}_2)\nu_F^2 + j(2k_2 - \bar{k}_2)\frac{\nu_F}{m} - j\frac{1-2a}{2m}\nu_F - \frac{4}{m} \quad , \tag{379$_1$}$$

$$(c_{122})_F = -\frac{2}{r^2}k_2^2\nu_F^2 + j\frac{1+2a}{mr^4}k_2^2\bar{k}_2\nu_F + j\frac{2}{mr^2}k_2(k_2+2\bar{k}_2)\nu_F - j\frac{2a^2}{mr^4}k_2(k_2-2\bar{k}_2)\nu_F +$$
$$+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\omega^2}{u_F^2} - \frac{1+2a}{mr^2}\right)k_2(k_2+2\bar{k}_2) + \frac{a}{mr^2}(2k_2-\bar{k}_2)\nu_F^2 - j\frac{1-6a}{2mr^2}(2k_2-\bar{k}_2)\nu_F - j\frac{3(1-2a)}{mr^2}\bar{k}_2\nu_F -$$
$$-\frac{2}{mr^2}\bar{k}_2 - 2\frac{1+a}{mr^2} - j\frac{(1-3a)a}{mr^2}\nu_F \quad , \tag{379$_2$}$$

$$(c_{123})_F = (c_{124})_F = (c_{125})_F = 0 \quad . \tag{379$_3$}$$

Il vient alors :

a	- 0,400	- 0,300	+ 0,125
$(\mathcal{C}_{12})_F$	- 0,239 012 - 0,235 996 .j	- 0,277 951 - 0,236 160 .j	- 0,301 351 - 0,324 332 .j
	+ 1,667 106 + 0,031 267 .j	+ 0,307 362 + 0,089 435 .j	- 0,391 164 - 0,040 477 .j
	0	0	0
	0	0	0
	0	0	0

Le tableau ci-après donne la valeur du coefficient complexe γ_2 en fonction du paramètre a .

a	$(\mathcal{V}_2)_F \cdot (\mathcal{C}_{12})_F$	$(\mathcal{V}_2)_F \cdot (\mathcal{U}_{02})_F$	γ_2
- 0,400	- 211,355 6 + 109,104 0 .j	- 48,200 0 - 58,577 8 .j	+ 0,659 69 - 3,065 30 .j
- 0,300	- 27,683 0 + 3,096 5 .j	- 23,400 0 - 69,906 5 .j	+ 0,079 37 - 0,369 43 .j
+ 0,125	+ 10,517 3 + 1,813 2 .j	- 7,250 0 - 125,326 1 .j	- 0,019 26 + 0,082 81 .j

Les paramètres principaux caractérisant l'oscillation limite peuvent maintenant être déterminés mais, auparavant, nous allons présenter numériquement le vecteur-colonne $(\mathcal{M}_2)_F$ qui sera utilisé par la suite :

a	- 0,400	- 0,300	+ 0,125	
$(\mathcal{M}_2)_F$	0,474 838	0,257 564	0,068 971	$\}\ \lvert k_2 \rvert$
	0,229 401	0,471 142	2,079 887	
	2,069 905	0,546 679	0,033 161	
	1	1	1	
	4,359 187	2,122 501	0,480 795	

L'amplitude et la pulsation réduite de l'oscillation limite sont respectivement données par les expressions suivantes :

$$\mathcal{A}_L \sim \frac{2\sqrt{2}}{u_F}\sqrt{\frac{\beta_2'}{\gamma_2'}\left(1-\frac{u}{u_F}\right)}\cdot(\mathcal{M}_2)_F \quad , \quad u \to u_F \quad , \tag{291}$$

$$\nu_L \sim \nu_F + \frac{2}{u_F^2}\frac{\beta_2'\gamma_2''-\beta_2''\gamma_2'}{\gamma_2'}\left(1-\frac{u}{u_F}\right) \quad , \quad u \to u_F \quad , \tag{290}$$

cette dernière formule permettant d'obtenir la pulsation ω_L de l'oscillation limite sous la forme

$$\frac{\omega_L}{\omega_\delta} = u\nu_L \sim u_F\nu_F - u_F\left(\nu_F - \frac{2}{u_F^2}\frac{\beta_2'\gamma_2''-\beta_2''\gamma_2'}{\gamma_2'}\right)\left(1-\frac{u}{u_F}\right) \quad , \quad u \to u_F \quad . \tag{380}$$

Le tableau ci-après présente les résultats numériques correspondant à

$$\left|1-\frac{u}{u_F}\right| = 0,01 \quad .$$

a		- 0,400	- 0,300	+ 0,125
am	$\frac{d\delta_L}{ds}$	+ 0,028 0	+ 0,038 0	+ 0,008 1
	$\frac{d\theta_L}{ds}$	+ 0,013 5	+ 0,069 5	+ 0,243 8
	δ_L	+ 0,122 2	+ 0,080 7	+ 0,003 9
	θ_L	+ 0,059 0	+ 0,147 6	+ 0,117 1
	$\mathcal{G}_L^{(1)}$	+ 0,257 2	+ 0,313 3	+ 0,056 3
$\nu_L - \nu_F$		+ 0,000 33	+ 0,003 99	- 0,021 66
ν_L		+ 0,229 73	+ 0,475 13	+ 2,058 23
$\frac{\omega_L}{\omega_\delta} - \frac{\omega_F}{\omega_\delta} = u\nu_L - u_F\nu_F$		- 0,020 73	- 0,004 01	- 0,001 21
$\frac{\omega_L}{\omega_\delta} = u\nu_L$		+ 2,403 74	+ 2,619 41	+ 2,919 31

Plus particulièrement, si nous considérons l'exemple retenu en 4.1 avec

$$b = 0{,}600 \text{ m}$$

et une fréquence propre de flexion N_δ telle que

$$\frac{\omega_\delta}{2\pi} = N_\delta = 6 \text{ Hz} \quad ,$$

nous avons une fréquence propre de torsion N_θ donnée par

$$\frac{\omega_\theta}{2\pi} = N_\theta = \varpi N_\delta = 18 \text{ Hz}$$

et il vient, d'après (117$_6$),

$$U = \omega_\delta b u = 22{,}619\,467.u \text{ m/s} .$$

Les résultats obtenus précédemment permettent alors de présenter le tableau suivant qui groupe les principales valeurs physiques intéressantes pour le cas particulier

$$\left|1 - \frac{U}{U_F}\right| = 0{,}01 .$$

a	- 0,400	- 0,300	+ 0,125
U_F (m/s)	239,1	126,0	31,8
$N_F = \frac{\omega_F}{2\pi}$ (Hz)	14,55	15,74	17,52
U (m/s)	236,7	124,7	32,1
$N_L = \frac{\omega_L}{2\pi}$ (Hz)	14,42	15,72	17,52
$am(\delta_L b)$ (m)	0,073	0,048	0,002
$am(\theta_L)$ (°)	3,4	8,5	6,7

D'une façon générale, on peut constater, pour les trois exemples choisis, que, au voisinage de la vitesse critique de flottement, la fréquence de l'oscillation limite est très peu inférieure à la fréquence de la vibration non amortie correspondant au flottement :

$$N_L \neq N_F \ .$$

Par ailleurs, bien que la vitesse retenue U ne diffère de la vitesse critique de flottement U_F que de 1 % de celle-ci, les amplitudes correspondantes de l'oscillation limite, relatives à la flexion $(\delta_L b)$ ou à la torsion (θ_L) , sont petites mais non négligeables. Plus particulièrement, lorsque le centre élastique et le centre de gravité des sections droites de l'aile sont à l'avant du milieu du profil $(a<0)$, ce qui est pratiquement le cas le plus courant, une perturbation, autour de l'équilibre, de quelques centimètres pour la flexion et de quelques degrés pour la torsion peut rendre instable l'équilibre qui est, par ailleurs, asymptotiquement stable pour des perturbations infiniment petites, lorsque la vitesse U est inférieure à U_F ; d'autre part, lorsque le centre élastique et le centre de gravité des sections droites de l'aile sont en arrière du milieu du profil $(a>0)$, une perturbation, autour de l'équilibre, de quelques millimètres pour la flexion et de quelques degrés pour la torsion n'entraîne pas obligatoirement une rupture bien que l'équilibre soit, par ailleurs, instable pour des perturbations infiniment petites lorsque la vitesse U est supérieure à U_F .

4.2.2.- Cas $\varpi = 0{,}5$.

Ce cas, avec $a = -0{,}600$, n'apporte, pour $\varepsilon = 0$, rien de nouveau par rapport à ce qui a été présenté au paragraphe 4.2.1, si ce n'est qu'il confirme les résultats obtenus précédemment lorsque le paramètre a est négatif, mais il sera utile pour vérifier par continuité le comportement du système lorsque nous traiterons, au paragraphe 4.3, les exemples avec amortissement structural non nul. Nous donnerons donc brièvement les résultats numériques ci-après.

4.2.2.1.- Système linéarisé.

La vitesse critique de flottement correspond à :

$$u_F = 5,033\ 985$$

et il n'y a pas de vitesse critique de divergence puisque nous avons $(1 + 2a) < 0$.

La valeur propre λ_2 correspondant à la vitesse critique de flottement est donnée par

$$(\lambda_2)_F = j\nu_F \quad , \qquad (174_2)$$

avec

$$\nu_F = 0,165\ 324 \ ,$$

d'où

$$\frac{\omega_F}{\omega_\delta} = u_F \nu_F = 0,832\ 240 \ .$$

Enfin, le vecteur propre-colonne $\mathcal{U}_2$ et le vecteur propre-ligne $\mathcal{V}_2$ correspondant à la vitesse critique de flottement sont présentés dans le tableau suivant, l'indice supérieur T représentant la transposition matricielle :

$(\mathcal{U}_2)_F$	$(\mathcal{V}_2)_F^T$
+ 0,563 333 + + 0,595 167 .j	- 4,189 482 .j
+ 0,165 324 .j	- 7,684 425 - - 10,473 706 .j
+ 3,600 000 - - 3,407 446 .j	1
1	+ 0,625 000 - - 2,317 793 .j
- 6,048 721 .j	0

Il est alors possible, sachant que, ici,

$$\frac{u_F}{2}\mathcal{B}_1+\mathcal{B}_2=\mathcal{B}_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ,$$

d'obtenir la valeur du coefficient complexe β_2 sous la forme suivante :

$$\beta_2 = + 0,180\ 8 - 1,894\ 5.j \ ;$$

il est à remarquer que nous avons bien $\beta'_2 = \mathcal{R}e\{\beta_2\} > 0$ puisque u_F correspond à la vitesse critique d'entrée en flottement.

4.2.2.2.- Système non linéaire.

A partir des résultats précédents et des expressions (379), nous pouvons calculer le vecteur $(\mathcal{C}_{12})_F$ et il vient :

$$(\mathcal{C}_{12})_F = \begin{bmatrix} - 0,017\ 104 - 0,258\ 732\ .j \\ + 5,201\ 822 + 3,687\ 855\ .j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ,$$

d'où la valeur du coefficient complexe γ_2 sous la forme ci-après :

$$\gamma_2 = + 4,741\ 89 - 4,542\ 71\ .j\ .$$

Les paramètres principaux caractérisant l'oscillation limite peuvent maintenant être déterminés mais, auparavant, nous allons présenter numériquement le vecteur-colonne $(\mathcal{M}_2)_F$ qui sera utilisé par la suite :

$$(\mathcal{M}_2)_F = \begin{bmatrix} 0,819\ 493 \\ 0,165\ 324 \\ 4,956\ 883 \\ 1 \\ 6,048\ 721 \end{bmatrix} .$$

La pulsation réduite et l'amplitude de l'oscillation limite étant données respectivement par les relations (290) et (291) et la pulsation par l'expression (380), le tableau suivant présente les résultats numériques correspondant à

$$1-\frac{u}{u_F}=0{,}01$$

am	$\frac{d\delta_L}{ds}$	+ 0,008 99
	$\frac{d\theta_L}{ds}$	+ 0,001 81
	δ_L	+ 0,054 39
	θ_L	+ 0,010 97
	$\varphi_L^{(1)}$	+ 0,066 37
$\nu_L-\nu_F$		+ 0,001 36
ν_L		+ 0,166 68
$\frac{\omega_L}{\omega_\delta}-\frac{\omega_F}{\omega_\delta}=u\nu_L-u_F\nu_F$		- 0,001 48
$\frac{\omega_L}{\omega_\delta}=u\nu_L$		+ 0,830 76

Plus particulièrement, si nous considérons l'exemple retenu en 4.1 avec

$$b = 0{,}500 \text{ m}$$

et une fréquence propre de flexion N_δ telle que

$$\frac{\omega_\delta}{2\pi} = N_\delta = 6 \text{ Hz} \quad ,$$

il correspond une fréquence propre de torsion N_θ donnée par

$$N_\theta = \frac{\omega_\theta}{2\pi} = \varpi N_\delta = 3 \text{ Hz}$$

et il vient, d'après (117_6),

$$U = \omega_\delta b u = 18{,}849\,556.u \text{ m/s} \quad .$$

Les résultats obtenus précédemment permettent alors de présenter le tableau suivant qui groupe les principales valeurs physiques intéressantes pour le cas particulier

$$1 - \frac{U}{U_F} = 0{,}01 \quad .$$

U_F (m/s)	94,9
$N_F = \frac{\omega_F}{2\pi}$ (Hz)	4,99
U (m/s)	93,9
$N_L = \frac{\omega_L}{2\pi}$ (Hz)	4,98
$am(\delta_L b)$ (m)	0,027
$am(\theta_L)$ (°)	0,6

On constate encore que, au voisinage de la vitesse critique de flottement, la fréquence de l'oscillation limite est très peu inférieure à la fréquence de la vibration non amortie correspondant au flottement

$$N_L \neq N_F \quad .$$

Par ailleurs, bien que la vitesse retenue U ne diffère de la vitesse critique de flottement U_F que de 1 % de celle-ci, les amplitudes correspondantes de l'oscillation limite, relatives à la flexion ($\delta_L b$) ou à la torsion (θ_L), sont petites mais non négligeables ; en particulier, une perturbation, autour de l'équilibre, de quelques centimètres pour la flexion et de quelques dixièmes de degré pour la torsion peut rendre instable l'équilibre qui est, par ailleurs, asymptotiquement stable pour des perturbations infiniment petites, lorsque la vitesse U est inférieure à U_F .

4.3.- Exemple avec amortissement structural : $\varepsilon \neq 0$.

Nous allons généraliser maintenant le cas précédent, correspondant à

$$\begin{cases} \varpi = 0,5 \\ a = -0,600 \end{cases} ,$$

pour lequel il existe, lorsque le facteur ε est différent de zéro et inférieur à ε_{cr} , une vitesse U_{F_1} d'entrée en flottement et une vitesse U_{F_2} de sortie de flottement. Nous considérerons d'abord un exemple correspondant à une valeur de ε très peu inférieure à ε_{cr} avant d'envisager le cas où ε tend vers ε_{cr} par valeurs supérieures. Mais, auparavant, nous déterminerons le couple de valeurs critiques $\left(u_{F_{cr}}, \varepsilon_{cr}\right)$.

4.3.1.- Calcul du couple $\left(u_{F_{cr}}, \varepsilon_{cr}\right)$.

Cette recherche s'effectuera en deux étapes. Tout d'abord, pour différentes valeurs positives du facteur ε , nous déterminerons les valeurs correspondantes de u_{F_1} et u_{F_2} ; ensuite, nous calculerons par interpolation $u_{F_{cr}}$ et ε_{cr} .

4.3.1.1.- Relation $u_{F_n} = u_{F_n(\varepsilon)}$

Sachant que $\mathcal{D}^*_{(u)}$, défini par les expressions (296) et (298), est un polynôme réel de la variable réelle u lorsque ε est fixé, nous présentons, dans le tableau suivant, les deux racines $u_{F_n(\varepsilon)}$ ($n = 1, 2$) positives les plus petites, correspondant à l'équation algébrique et entière du cinquième degré $\mathcal{D}^*_{(u)} = 0$, pour différentes valeurs positives du facteur ε. Le calcul approché de ces racines, pour une valeur donnée de ε, a été effectué par substitution de valeurs particulières de u dans $\mathcal{D}^*_{(u)}$, puis séparation, par procédé graphique, des deux racines cherchées de l'équation $\mathcal{D}^*_{(u)} = 0$ et interpolation linéaire finale. Remarquons que, d'après les expressions (296), les coefficients du polynôme $\mathcal{D}^*_{(u,\varepsilon)}$ se présentent comme suit :

$$d_0 = - (0{,}281\ 25 + 2{,}25.\varepsilon^2).\varepsilon^2 ,$$
$$d_1 = - (0{,}054\ 562\ 5 + 0{,}873.\varepsilon^2).\varepsilon ,$$
$$d_2 = - (0{,}002\ 025 + 0{,}086\ 549.\varepsilon^2 + 0{,}12.\varepsilon^4) ,$$
$$d_3 = + (0{,}000\ 387\ 608 - 0{,}033\ 04.\varepsilon^2).\varepsilon ,$$
$$d_4 = + 0{,}000\ 079\ 91 - 0{,}003\ 293\ 44.\varepsilon^2 ,$$
$$d_5 = - 0{,}000\ 244.\varepsilon .$$

ε	u_{F_1}	u_{F_2}
0	5,034 0	-
0,010 00	5,6	31,8
0,020 00	7,0	14,0
0,023 00	8,2	10,6
0,023 50	8,892 2	9,564 2
0,023 53	9,030 3	9,408 0
0,023 54	9,116 2	9,316 1
0,030 00	-	-

4.3.1.2.- Détermination de $u_{F_{cr}}$ et ε_{cr}

Au voisinage du point $(u_{F_{cr}}, \varepsilon_{cr})$ de la courbe définie par l'équation $\mathcal{D}^*_{(u_F,\varepsilon)} = 0$, nous remplacerons cette équation par l'approximation suivante :

$$\varepsilon = \varepsilon_{cr} + \varepsilon^{(2)}\left(u_F - u_{F_{cr}}\right)^2 + \varepsilon^{(3)}\left(u_F - u_{F_{cr}}\right)^3 \qquad (381)$$

que nous utiliserons sous la forme

$$\varepsilon = \varepsilon^{I} u_F^3 + \varepsilon^{II} u_F^2 + \varepsilon^{III} u_F + \varepsilon^{IV} \quad . \qquad (382)$$

Nous déterminerons alors les coefficients ε^c (c = I, ..., IV) en imposant les quatre conditions suivantes tirées du tableau précédent :

pour $u_F = 9{,}030\ 3$ ou $u_F = 9{,}408\ 0$, on doit avoir $\varepsilon = 0{,}023\ 53$,
pour $u_F = 9{,}116\ 2$ ou $u_F = 9{,}316\ 1$, on doit avoir $\varepsilon = 0{,}023\ 54$.

Ceci conduit donc à résoudre un système de quatre équations du premier degré à quatre inconnues. Tous calculs faits, nous obtenons :

$$\varepsilon^{I} = +\ 0{,}000\ 091\ 113 \ ,$$
$$\varepsilon^{II} = -\ 0{,}002\ 909\ 53 \ ,$$
$$\varepsilon^{III} = +\ 0{,}030\ 411\ 7$$
$$\varepsilon^{IV} = -\ 0{,}080\ 929\ 6 \quad .$$

La valeur $u_{F_{cr}}$ peut maintenant être calculée comme devant être la racine la plus proche de 9,2 de l'équation

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial u_F} = 3\varepsilon^{I} u_F^2 + 2\varepsilon^{II} u_F + \varepsilon^{III} = 0 \ , \qquad (383)$$

ce qui donne

$$u_{F_{cr}} = \ 9{,}214\ 99 \ ,$$

d'où, à partir de la relation (382),

$$\varepsilon_{cr} = \ 0{,}023\ 543\ 9.$$

Pour vérifier la valeur de l'approximation utilisée, nous pouvons calculer directement les valeurs $\mathcal{D}^*_{(u_{F_{cr}}, \varepsilon_{cr})}$ et $\frac{\partial \mathcal{D}^*}{\partial u}(u_{F_{cr}}, \varepsilon_{cr})$ qui doivent être nulles. Numériquement, nous obtenons :

$$\mathcal{D}^{*}_{(u_{F_{cr}},\varepsilon_{cr})} = 0{,}569\ 848\ 4 - 0{,}569\ 848\ 2 = 0{,}000\ 000\ 2\ ,$$

$$\frac{\partial \mathcal{D}^{*}}{\partial u}(u_{F_{cr}},\varepsilon_{cr}) = 0{,}246\ 618\ 9 - 0{,}246\ 619\ 1 = 0{,}000\ 000\ 2\ ,$$

c'est-à-dire des écarts relatifs inférieurs à 10^{-6} qui justifient donc l'approximation (381) au voisinage de $(u_{F_{cr}}, \varepsilon_{cr})$. Par ailleurs, les inégalités (304)

$$\frac{\partial \mathcal{D}^{*}}{\partial \varepsilon}(u_{F_{cr}},\varepsilon_{cr}) = -\ 17{,}947\ 1 < 0\ ,$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{D}^{*}}{\partial u^2}(u_{F_{cr}},\varepsilon_{cr}) = -\ 0{,}014\ 002\ 6 < 0$$

sont bien vérifiées numériquement. Enfin, ayant déterminé

$$T_{cr} = \quad 50{,}629\ 9\ ,$$
$$R_{cr} = -\ 301{,}695\ ,$$

l'utilisation du développement approché (306) permet d'établir le tableau suivant qui, par comparaison avec le tableau du paragraphe 4.3.1.1, présente une très bonne concordance entre les u_{F_n} et les $(u_{F_n})_{app}$ $(n = 1, 2)$, au voisinage de la valeur ε_{cr}.

ε	$(u_{F_1})_{app}$	$(u_{F_2})_{app}$
0,023 00	8,198	10,560
0,023 50	8,893	9,564
0,023 53	9,030	9,408
0,023 54	9,116	9,316
0,023 55	Complexe	Complexe

4.3.2.- Exemple avec $\varepsilon = 0{,}023\ 54$.

Cette valeur du facteur ε a été choisie comme étant assez voisine de ε_{cr} tout en permettant une séparation numérique significative entre les deux vitesses de flottement U_{F_1} et U_{F_2} .

4.3.2.1.- Système linéarisé.

Rappelons que la vitesse d'entrée en flottement et la vitesse de sortie de flottement sont respectivement données par :

$$u_{F_1} = 9{,}116 \ ,$$
$$u_{F_2} = 9{,}316 \ ;$$

par ailleurs, il n'y a pas de vitesse critique de divergence puisque nous avons $(1 + 2a) < 0$. L'équation caractéristique du système se présente, en fonction de u , sous la forme :

$$\lambda\left[\lambda^4+\left(0{,}244+\frac{0{,}070\ 62}{u}\right)\lambda^3+\left(0{,}050+\frac{0{,}009\ 133\ 52}{u}+\frac{1{,}251\ 108\ 263\ 2}{u^2}\right)\lambda^2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{0{,}001\ 883\ 2}{u}+\frac{0{,}169}{u^2}+\frac{0{,}035\ 31}{u^3}\right)\lambda+\left(\frac{0{,}040}{u^2}+\frac{0{,}250}{u^4}\right)\right]=0 \qquad (384)$$

et la valeur propre λ_2 correspondant à la vitesse critique de flottement est donnée par

$$\nu_{F_1} = 0{,}095\ 31 \ ,$$
$$\nu_{F_2} = 0{,}093\ 37 \ ,$$

sachant que

$$\left(\lambda_2\right)_{F_n} = j\nu_{F_n} \quad , \quad n = 1,2 \ ;$$

on en tire :

$$\frac{\omega_{F_1}}{\omega_\delta} = u_{F_1}\nu_{F_1} = 0{,}868\ 9 \ ,$$

$$\frac{\omega_{F_2}}{\omega_\delta} = u_{F_2}\nu_{F_2} = 0{,}869\ 8 \ .$$

Le vecteur propre-colonne et le vecteur propre-ligne correspondant à la vitesse critique de flottement sont présentés respectivement dans les deux tableaux suivants.

U_F	9,116	9,316	
$(U_2)_F$	+ 0,848 11 + + 0,349 27 .j	+ 0,854 08 + + 0,342 02 .j	
	+ 0,095 31 .j	+ 0,093 37 .j	
	+ 3,664 56 - - 8,898 48 .j	+ 3,663 17 - - 9,147 65 .j	k_2
	1	1	
	- 10 ,492 12 .j	- 10,710 50 .j	

U_F	$(V_2)_F$				
9,116	- 7,920 37 .j	- 6,127 80 - - 20,823 56 .j	1	+ 1,086 46 - - 2,765 16 .j	0
9,316	- 8,103 07 .j	- 6,086 16 - - 21,281 42 .j	1	+ 1,095 18 - - 2,795 21 .j	0

Il est alors possible, sachant que

$$\frac{u_F}{2}\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 = \begin{bmatrix} 0{,}023\ 54.u_F & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}011\ 77.u_F & 0 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de présenter le tableau suivant donnant la valeur du coefficient complexe β_2.

u_F	$(\mathcal{V}_2)_F \cdot \left(\frac{u_F}{2}\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2\right) \cdot (\mathcal{U}_2)_F$	$(\mathcal{V}_2)_F \cdot (\mathcal{U}_2)_F$	β_2
9,116	- 71,204 6 - - 35,734 7 .j	+ 9,502 0 - - 18,965 0 .j	+ 0,002 5 - - 3,755 8 .j
9,316	- 74,819 9 - - 36,583 3 .j	+ 9,516 7 - - 19,431 8 .j	- 0,002 5 - - 3,849 2 .j

Il est à remarquer que nous avons bien $(\beta'_2)_1 = \mathcal{R}e\{(\beta_2)_1\} > 0$ puisque u_{F_1} correspond à la vitesse d'entrée en flottement et $(\beta'_2)_2 = \mathcal{R}e\{(\beta_2)_2\} < 0$ puisque u_{F_2} correspond à la vitesse de sortie de flottement.

4.3.2.2.- Système non linéaire.

A partir des résultats précédents, il est possible de calculer le vecteur $(\mathcal{C}_{12})_F$ à l'aide des expressions (379), à condition maintenant d'ajouter le terme $-j\frac{2\varpi\varepsilon}{r^2 u_F}k_2(k_2 - 2\bar{k}_2)\nu_F$ dans l'expression de $(c_{122})_F$ c'est-à-dire au second membre de la relation (379_2) ; il vient alors :

u_F	9,116	9,316
$(\mathcal{C}_{12})_F$	- 0,039 49 - - 0,230 28 .j	- 0,039 95 - - 0,227 26 .j
	+ 9,935 11 + + 2,804 43 .j	+ 10,043 97 + + 2,757 69 .j
	0	0
	0	0
	0	0

d'où le tableau ci-après donnant la valeur du coefficient complexe γ_2 :

u_F	$(\mathcal{V}_2)_F \cdot (\mathcal{C}_{12})_F$	$(\mathcal{V}_2)_F \cdot (\mathcal{U}_{02})_F$	γ_2
9,116	- 4,306 0 - - 223,756 6 .j	+ 9,502 0 - - 18,965 0 .j	+ 9,340 0 - - 4,906 7 .j
9,316	- 4,283 1 - - 230,209 9 .j	+ 9,516 7 - - 19,431 8 .j	+ 9,468 1 - - 4,857 4 .j

Les paramètres principaux caractérisant l'oscillation limite peuvent maintenant être déterminés mais, auparavant, nous présenterons numériquement le vecteur-colonne $(\mathcal{M}_2)_F$ qui sera utilisé par la suite :

u_F	9,116	9,316	
$(\mathcal{M}_2)_F$	0,917 21	0,920 02	
	0,095 31	0,093 37	
	9,623 51	9,853 85	$\Big\} \lvert k_2 \rvert$
	1	1	
	10,492 12	10,710 50	

La pulsation réduite et l'amplitude de l'oscillation limite étant données respectivement par les relations (290) et (291) et la pulsation par l'expression (380), le tableau suivant présente les résultats numériques correspondant à

$$\left|1-\frac{u}{u_F}\right|=0,01 \ .$$

u_F		9,116	9,316
am	$\frac{d\delta_L}{ds}$	+ 0,000 5	+ 0,000 5
	$\frac{d\theta_L}{ds}$	+ 0,000 0	+ 0,000 0
	δ_L	+ 0,004 9	+ 0,004 8
	θ_L	+ 0,000 5	+ 0,000 5
	$\mathcal{G}_L^{(1)}$	+ 0,005 3	+ 0,005 3
$\nu_L-\nu_F$		+ 0,000 9	+ 0,000 9
ν_L		+ 0,096 2	+ 0,094 3
$\frac{\omega_L}{\omega_\delta}-\frac{\omega_F}{\omega_\delta}=u\nu_L-u_F\nu_F$		- 0,000 5	- 0,000 4
$\frac{\omega_L}{\omega_\delta}=u\nu_L$		+ 0,868 4	+ 0,869 4

Plus particulièrement, si nous considérons l'exemple retenu au paragraphe 4.2.2, les résultats obtenus précédemment permettent alors de présenter le tableau ci-après qui groupe les principales valeurs physiques intéressantes pour le cas particulier

$$\left|1-\frac{U}{U_F}\right| = 0{,}01 \quad .$$

U_F (m/s)	171,8	175,6
$N_F=\frac{\omega_F}{2\pi}$ (Hz)	5,21	5,22
U (m/s)	170,1	177,4
$N_L=\frac{\omega_L}{2\pi}$ (Hz)	5,21	5,22
$am(\delta_L b)$ (m)	0,002	0,002
$am(\theta_L)$ (°)	0,03	0,03

On peut constater, pour l'exemple choisi, que, au voisinage des vitesses de flottement (entrée ou sortie), la fréquence de l'oscillation limite est pratiquement égale (à moins de 10^{-3} près) à la fréquence de la vibration non amortie correspondant au flottement (entrée ou sortie) :

$$N_{L_1} \# N_{F_1} \quad ,$$

$$N_{L_2} \# N_{F_2} \quad .$$

Par ailleurs, lorsque la vitesse retenue U ne diffère de la vitesse de flottement U_F (entrée ou sortie) que de 1 % de celle-ci, les amplitudes correspondantes de l'oscillation limite, relatives à la flexion ($\delta_L b$)

ou à la torsion (θ_L), sont très petites et même négligeables. Plus particulièrement, une perturbation, autour de l'équilibre, de quelques millimètres pour la flexion et de quelques centièmes de degré pour la torsion peut rendre instable l'équilibre qui est, par ailleurs, asymptotiquement stable pour des perturbations infiniment petites, lorsque la vitesse est soit inférieure à U_{F_1} soit supérieure à U_{F_2}. Le domaine d'instabilité pratique en U est donc bien supérieur à l'intervalle $\left[U_{F_1}, U_{F_2}\right]$ obtenu en linéarisant le système.

4.3.3.- Cas où le facteur d'amortissement ε tend vers ε_{cr} à droite.

4.3.3.1.- Système linéarisé, avec $\varepsilon = \varepsilon_{cr}$.

Le couple $\left(u_{F_{cr}}, \varepsilon_{cr}\right)$ a été déterminé au paragraphe 4.3.1.2 et nous le rappelons ci-après :

$$\varepsilon_{cr} = 0{,}023\ 543\ 9\ ,$$

$$u_{F_{cr}} = 9{,}214\ 99\ ;$$

par ailleurs, il n'y a pas de vitesse critique de divergence, quel que soit ε, puisque nous avons $(1 + 2a) < 0$ et que cette condition suffisante est indépendante de ε. L'équation caractéristique du système se présente sous la forme :

$$\lambda_{F_{cr}}(\lambda^4_{F_{cr}} + 0{,}251\ 664\ 9.\lambda^3_{F_{cr}} + 0{,}065\ 724\ 81.\lambda^2_{F_{cr}} + 0{,}002\ 239\ 732.\lambda_{F_{cr}} + 0{,}000\ 505\ 724\ 5) =$$

ou :

$$\lambda_{F_{cr}}(\lambda^2_{F_{cr}} + 0{,}251\ 664\ 9.\lambda_{F_{cr}} + 0{,}056\ 825\ 16).(\lambda^2_{F_{cr}} + 0{,}008\ 899\ 659) = 0$$

et la valeur propre λ_2 correspondant à la vitesse critique de flottement est donnée par

$$\nu_{F_{cr}} = 0{,}094\ 338\ 0\ ,$$

sachant que

$$\left(\lambda_2\right)_{F_{cr}} = j\nu_{F_{cr}}\ ;$$

on en tire

$$\frac{\omega_{F_{cr}}}{\omega_\delta} = u_{F_{cr}}\nu_{F_{cr}} = 0{,}869\ 323\ .$$

Le vecteur propre-colonne $\mathcal{U}_2$ et le vecteur propre-ligne $\mathcal{V}_2$ correspondant à la vitesse critique de flottement sont présentés dans le tableau suivant, l'indice supérieur T représentant la transposition matricielle :

$(\mathcal{U}_2)_{F_{cr}}$	$(\mathcal{V}_2)^T_{F_{cr}}$
+ 0,851 11 + + 0,345 64 .j	- 8,010 80 .j
+ 0,094 34 .j	- 6,106 92 - - 21,050 37 .j
+ 3,663 87 - - 9,021 93 .j	1
1	+ 1,090 85 - - 2,779 96 .j
- 10,600 18 .j	0

Il est alors possible, sachant que :

$$(\mathcal{V}_2)_{F_{cr}} \cdot (\mathcal{U}_2)_{F_{cr}} = + 9,509\ 45 - 19,196\ 09\ .j$$

d'obtenir le coefficient complexe $(\beta_2)^{(1)}_{cr}$ sous la forme suivante (cf. (351_1) et (357)) :

$$(\beta_2)^{(1)}_{cr} = \frac{1}{u_{F_{cr}}} \frac{(\mathcal{V}_2)_{F_{cr}} \cdot \mathcal{B}^{(1)}_1 \cdot (\mathcal{U}_2)_{F_{cr}}}{(\mathcal{V}_2)_{F_{cr}} \cdot (\mathcal{U}_2)_{F_{cr}}} \quad , \tag{386}$$

c'est-à-dire :

$$(\beta_2)^{(1)}_{cr} = + 0,081\ 431 + 0,002\ 192\ 7\ .j\ ;$$

il est à remarquer que nous avons bien $\left(\beta'_2\right)^{(1)}_{cr} = \mathcal{R}e\left\{\left(\beta_2\right)^{(1)}_{cr}\right\} > 0$, comme l'exigeait l'inégalité (362). Par ailleurs, le calcul du coefficient complexe $\left(\beta_2\right)^{(0)}_{cr}$ mis sous la forme (cf. (351_1) et (357))

$$\left(\beta_2\right)^{(0)}_{cr} = \frac{2}{u^3_{F_{cr}}} \frac{\left(\mathcal{V}_2\right)_{F_{cr}} \cdot \left(\frac{u_{F_{cr}}}{2} \varepsilon_{cr} \mathcal{B}^{(1)}_1 + \mathcal{B}_2\right) \cdot \left(\mathcal{U}_2\right)_{F_{cr}}}{\left(\mathcal{V}_2\right)_{F_{cr}} \cdot \left(\mathcal{U}_2\right)_{F_{cr}}} \qquad (387)$$

nous donne :

$$\left(\beta_2\right)^{(0)}_{cr} = + 0{,}000\ 000\ 001 + 0{,}009\ 717\ 6\ .j$$

et nous avons bien $\left(\beta'_2\right)^{(0)}_{cr} = \mathcal{R}e\left\{\left(\beta_2\right)^{(0)}_{cr}\right\} = 0$, ce qui vérifie numériquement l'inégalité (360).

4.3.3.2.- Système non linéaire.

Le calcul du vecteur-colonne $\left(\mathcal{C}_{12}\right)_{F_{cr}}$ s'effectue, à partir des résultats précédents, d'une façon identique à celle qui a été utilisée au paragraphe 4.3.2.2 et il vient :

$$\left(\mathcal{C}_{12}\right)_{F_{cr}} = \begin{bmatrix} - 0{,}039\ 726 - 0{,}228\ 783\ .j \\ + 9{,}984\ 709 + 2{,}781\ 161\ .j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ,$$

d'où la valeur du coefficient complexe $\left(\gamma_2\right)_{cr}$ sous la forme suivante :

$$\left(\gamma_2\right)_{cr} = + 9{,}400\ 44 - 4{,}878\ 97\ .j \ .$$

Le vecteur-colonne $\left(\mathcal{M}_2\right)_{F_{cr}}$, nécessaire pour déterminer les paramètres principaux caractérisant l'oscillation limite, se présente numériquement comme ci-après :

$$\left(\mathcal{M}_2\right)_{F_{cr}} = \begin{bmatrix} 0{,}918\ 62 \\ 0{,}094\ 34 \\ 9{,}737\ 51 \\ 1 \\ 10{,}600\ 18 \end{bmatrix} .$$

L'amplitude et la pulsation réduite de l'oscillation limite sont respectivement données par les expressions suivantes :

$$\mathcal{A}_L \sim 2\sqrt{\frac{(\beta_2')_{cr}}{(\gamma_2')_{cr}}(\varepsilon-\varepsilon_{cr})}\cdot(\mathcal{M}_2)_{F_{cr}} \quad , \quad (u,\varepsilon)\to(u_{F_{cr}},\varepsilon_{cr}) \quad , \qquad (373)$$

$$\nu_L \sim \nu_{F_{cr}} + (\beta_2'')_{cr}^{(0)}(u-u_{F_{cr}}) + \frac{(\beta_2')_{cr}(\gamma_2'')_{cr} - (\beta_2'')_{cr}^{(1)}(\gamma_2')_{cr}}{(\gamma_2')_{cr}}(\varepsilon-\varepsilon_{cr}) \quad , \quad (u,\varepsilon)\to(u_{F_{cr}},\varepsilon_{cr}) \quad , \qquad (372)$$

cette dernière formule permettant d'obtenir la pulsation ω_L de l'oscillation limite sous la forme :

$$\frac{\omega_L}{\omega_\delta} = u\nu_L \sim u_{F_{cr}}\nu_{F_{cr}} + \left[\nu_{F_{cr}} + u_{F_{cr}}(\beta_2'')_{cr}^{(0)}\right](u-u_{F_{cr}}) + u_{F_{cr}}\frac{(\beta_2')_{cr}(\gamma_2'')_{cr} - (\beta_2'')_{cr}^{(1)}(\gamma_2')_{cr}}{(\gamma_2')_{cr}}(\varepsilon-\varepsilon_{cr}) \quad , \quad (u,\varepsilon)\to(u_{F_{cr}},\varepsilon_{cr}) \, . \qquad (388)$$

Le tableau ci-après présente les résultats numériques correspondant à

$$1-\frac{u}{u_{F_{cr}}} = -\left(1-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cr}}\right) = 0{,}01 \quad .$$

am	$\frac{d\delta_L}{ds}$	+ 0,002 62
	$\frac{d\theta_L}{ds}$	+ 0,000 27
	δ_L	+ 0,027 81
	θ_L	+ 0,002 86
	$\varphi_L^{(1)}$	+ 0,030 28
$\nu_L - \nu_{F_{cr}}$		- 0,000 91
ν_L		+ 0,093 43
$\frac{\omega_L}{\omega_\delta} - \frac{\omega_{F_{cr}}}{\omega_\delta} = u\nu_L - u_{F_{cr}}\nu_{F_{cr}}$		- 0,017 04
$\frac{\omega_L}{\omega_\delta} = u\nu_L$		+ 0,852 28

Plus particulièrement, si nous considérons l'exemple retenu au paragraphe 4.2.2.2, les résultats obtenus précédemment permettent alors de présenter le tableau ci-après qui groupe les principales valeurs physiques intéressantes pour le cas particulier

$$1-\frac{U}{U_{F_{cr}}}=-\left(1-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cr}}\right)=0,01 \quad .$$

$U_{F_{cr}}$ (m/s)	173,7
$N_{F_{cr}}=\frac{\omega_{F_{cr}}}{2\pi}$ (Hz)	5,22
U (m/s)	172,0
ε	0,023 8
$N_L=\frac{\omega_L}{2\pi}$ (Hz)	5,11
$am(\delta_L b)$ (m)	0,014
$am(\theta_L)$ (°)	0,16

On constate encore que, au voisinage du couple $(U_{F_{cr}},\varepsilon_{cr})$, la fréquence de l'oscillation limite est très peu inférieure à la fréquence de la vibration non amortie correspondant au flottement pour $\varepsilon=\varepsilon_{cr}$:

$$N_L \neq N_{F_{cr}} \quad .$$

Par ailleurs, lorsque les valeurs retenues pour le couple (U,ε) ne diffèrent des valeurs correspondantes pour le couple $(U_{F_{cr}}, \varepsilon_{cr})$ que de 1 % de celles-ci, les amplitudes de l'oscillation limite, relatives à

la flexion ($\delta_t b$) ou à la torsion (θ_t), sont très petites. En particulier, une perturbation, autour de l'équilibre, de l'ordre du centimètre pour la flexion et de l'ordre du dixième de degré pour la torsion peut rendre instable l'équilibre qui est, par ailleurs, asymptotiquement stable pour des perturbations infiniment petites, lorsque le facteur d'amortissement structural ε est supérieur à ε_{cr}. Le domaine de stabilité pratique en (U,ε) est donc bien inférieur à celui obtenu en linéarisant le système.

5.- CONCLUSION

L'étude qui a été présentée montre l'importance qu'il y a, pour le problème du flottement aéroélastique de voilure, à tenir compte de facteurs non linéaires dont seule l'intervention permet de rendre compte de certains phénomènes, comme l'existence d'oscillations limites, cette possibilité n'étant pas donnée par la linéarisation du type courant, la seule habituellement employée. Nous avons particulièrement montré qu'une solution d'équilibre linéairement instable pouvait être le centre de vibrations stables d'amplitude finie, ces oscillations limites étant alors atteintes en un temps fini, et que, à l'opposé, une solution d'équilibre linéairement stable pouvait devenir instable si les conditions initiales étaient à l'extérieur d'un certain domaine comprenant l'origine de l'espace de phase. Ce dernier cas est particulièrement important, d'une part, parce qu'il conduit, à partir d'une excitation "dure", comme une rafale, à un flottement du type "explosif" et, d'autre part, parce qu'il fait apparaître, dans certaines conditions, un comportement particulier dangereux ne pouvant être mis en évidence que dans le domaine non linéaire ; ce phénomène est à souligner, puisque, dans le domaine linéaire, il ne lui correspond aucune vitesse critique de flottement, mais il semble qu'il ne puisse se produire que si la fréquence propre de flexion est supérieure à la fréquence propre de torsion, ce qui est une condition rarement vérifiée en pratique.

Il est à remarquer que les forces aérodynamiques ont été présentées sous une forme non sinusoïdale et qu'elles ont été obtenues à partir du développement d'une théorie non linéaire approchée pour le calcul de l'écoulement bidimensionnel instationnaire d'un fluide incompressible ; l'hypothèse de quasi-stationnarité utilisée pour le sillage tourbillonnaire a permis de tenir compte de non-linéarités sans complication excessive, mais une étude plus approfondie du comportement instationnaire des tourbillons permettrait d'améliorer les expressions de forces aérodynamiques.

Enfin, il semble intéressant de noter que, par suite de la généralité des équations matricielles (205) et (206), la méthode des perturbations utilisée peut être employée pour divers problèmes d'aéroélasticité ainsi que pour des problèmes du même genre pouvant se poser dans d'autres disciplines. Ses avantages sur la méthode, souvent envisagée, de l'équivalent harmonique sont la possibilité d'utiliser sans difficulté un grand nombre de modes propres et surtout la simplicité avec laquelle il est possible de déterminer la solution stationnaire et, en particulier, l'amplitude et la stabilité de l'oscillation limite, puisque cette méthode ne fait appel qu'à des opérations classiques de l'algèbre linéaire. Par ailleurs, il serait possible, si le problème l'exigeait et au prise, il est vrai, de complications, de préciser plus étroitement le comportement asymptotique de la solution obtenue, en introduisant des termes complémentaires d'ordre supérieur à un.

6.- B I B L I O G R A P H I E

1. General Theory of aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter

T. Theodorsen

N.A.C.A. Report n° 496 - 1935 -

2. On some reciprocal Relations in the Theory of nonstationary Flows

I.E. Garrick

N.A.C.A. Report n° 629 - 1938 -

3. Airfoil Theory for non-uniform Motion

T. von Karman & W.R. Sears

Journal of the aeronautical Sciences, vol. 5, nb. 10, pp. 379-390 - August 1938 -

4. On some Fourier Transforms in the Theory of non-stationary Flows

I.E. Garrick

Proceedings of the fifth international Congress for applied Mechanics - 1939 -

5. Operational Methods in the Theory of Airfoils in non-uniform Motion

W.R. Sears

Journal of the Franklin Institute, n° 1 375, vol. 230, n° 1, pp. 95-111 - 1940 -

6. Mécanique des Fluides théorique

M. Giqueaux

Librairie polytechnique Ch. Béranger, Paris - 1944 -

7. Les Mouvements plans non stationnaires à Circulation constante et les Mouvements infiniment voisins

G. Couchet

Publication O.N.E.R.A. n° 31 - 1949 -

8. Efforts aérodynamiques sur un Profil animé d'un Mouvement quelconque dans un Fluide au Repos à l'Infini

G. Couchet

Publication O.N.E.R.A. n° 56 - 1952 -

9. Une Méthode générale de Linéarisation des Problèmes physiques

J.M. Souriau

Publication scientifique et technique du Ministère de l'Air, n° 261, pp. 251-268 - 1952 -

10. Cours de Mathématiques

J. Bass

Masson et Cie - 1956 -

11. Questions de Stabilité

M. Janet

Les Cours de Sorbonne - Centre de Documentation universitaire - 1957 -

12. Influence de l'Amortissement interne sur la Vitesse critique de Flottement

P. Salaün

La Recherche aéronautique, n° 61, pp. 19-25 - Novembre-décembre 1957 -

13. Dynamics and nonlinear Mechanics

E. Leimanis & N. Minorsky

Surveys in applied Mathematics, II. John Wiley & Sons, Inc. - 1958 -

14. Efforts d'un Fluide incompressible sur un Profil oscillant autour d'une Incidence non nulle

G. Couchet

Publication O.N.E.R.A. n° 96 - Juin 1959 -

15. Une Tentative pour tenir compte d'Effets aérodynamiques non linéaires dans le Calcul du Flottement de Structure en Régime incompressible
R. Mazet & A. Schindler
La Recherche Aéronautique, n° 71, pp. 48-50 - Juillet-Août 1959 -

16. Méthodes modernes d'Etude des Systèmes asservis
J.-C. Gille, P. Decaulne & M. Pélegrin
Technique de l'Automatisme - Dunod - 1960 -

17. Asymptotic Methods in the Theory of non-linear Oscillations
N. Bogoliubov & Y. Mitropolsky
Hindustan Publishing Corporation. (India) - 1961 -

18. Mécanique des Milieux continus
P. Germain
Masson et Cie, Paris - 1962 -

19. Equations différentielles
Mme Lelong
Centre de Documentation universitaire - Paris - 1962 -

20. The two Variable Expansion Procedure for the approximate Solution of certain non-linear differential Equations
J. Kevorkian
Douglas Report SM-42 620 - 3 December 1962 -

21. Nonlinear Oscillations in physical Systems
C. Hayashi
Mc Graw-Hill Electrical and Electronic Engineering Series -
Mc Graw-Hill Book Company - 1964 -

22. Stability of damped mechanical Systems
R. Pringle Jr.
A.I.A.A. Journal, pp. 363-364 - February 1965 -

23. Asymptotic Expansions for ordinary differential Equations
W. Wasow
Pure and applied Mathematics. Vol. XIV - Interscience Publishers - 1965 -

24. Stability Analysis of a simplified flexible Vehicle via Lyapunov's direct Method
P.K.C. Wang
A.I.A.A. Journal, volume 3, number 9, pp. 1 764-1 766 - Sept. 1965

25. Comments on "Stability of damped mechanical Systems "and a further Extension
E.E. Zajac
A.I.A.A. Journal, volume 3, number 9, pp. 1 749-1 750 - Sept. 1965 -

26. A Perturbation Method for Treating nonlinear Oscillation Problems
A.H. Nayfeh
Journal of Mathematics and Physics, volume XLIV, number 4, pp. 368-374 - December 1965 -

27. On the Construction and Interpretation of Liapunov Functions
J.H. George
A Dissertation - University, Alabama - 1966 -

28. Mécanique vibratoire
R. Mazet
Librairie polytechnique Béranger - Dunod - 1966 -

29. Mécanique. II. Milieux continus
M. Roy
Sciences de l'Ingénieur - Dunod - 1966 -

30. On the Stability of a Body with connected moving Parts

R. Pringle Jr.

A.I.A.A. Journal, vol. 4, n° 8, pp. 1 395-1 404 - August 1966 -

31. Methodes d'Etude des Systèmes asservis non linéaires

J.-Ch. Gille, P. Decaulne & Pélegrin

Techniques de l'automatisme - Dunod - 1967 -

32. Determination of Stability Boundaries using Liapunov Functions and numerical Minimisation

R.P. Muddle

R.A.E. Technical Report, n° 67 148 - July 1967 -

33. An Energy Method for Stability Analysis of nonlinear, nonconservative Systems

J. Roorda & S. Nemat-Nasser

A.I.A.A. Journal, vol. 5, n° 7, pp. 1 262-1 268 - July 1967 -

34. Circumferentially traveling Wave Flutter of a circular cylindrical Shell

D.A. Evensen & M.D. Olson

- A.I.A.A. Paper, n° 68-76, A.I.A.A. 6th Aerospace Sciences Meeting-january - 1968 -
- A.I.A.A. Journal, vol. 6, n° 8, pp. 1 522-1 527 - August 1968 -

35. Stability of nonlinear Oscillations predicted by harmonic-linearisation Technique

E.A. Freeman

Proceedings The Institution of electrical Engineers, vol. 115, n° 3, pp. 445-452 - March 1968 -

36. Conformal Transformation employing direct-search Techniques of Minimisation

P.J. Lawrenson & S.K. Gupta

Proceedings The Institution of electrical Engineers, vol. 115, n° 3, pp. 427-431 - March 1968 -

37. Nonlinear two-dimensional unsteady Potential Flow with Lift
J.P. Giesing
Journal of Aircraft, volume 5, number 2, pp. 135-143 - March-April 1968 -

38. Perturbation Methods in applied Mathematics
J.D. Cole
Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts - 1968 -

39. Calcul infinitésimal
J. Dieudonné
Hermann - 1968 -

40. Second-Order Theory for Flow past oscillating Foils
C.F. Chen & R.A. Wirtz
A.I.A.A. Journal, vol. 6, n° 8, pp. 1 556-1 562 - August 1968 -

41. Aerodynamic Loading on a two-dimensional Airfoil during dynamic Stall
N.D. Ham
A.I.A.A. Journal, vol. 6, n° 10, pp. 1 927-1 934 - October 1968 -

42. Nouveaux Théorèmes de Stabilité utilisant la Méthode directe de Liapounov
N. Rouche
Rapport n° 21 - Université catholique de Louvain - Octobre 1968 -

43. A Perturbation Method for Treating nonlinear Panel Flutter Problems
L. Morino
A.I.A.A. Journal, volume 7, number 3, pp. 405-411 - March 1969 -

44. Asymptotic Stability of second-order linear Systems with semidefinite Damping
G.M. Connell
A.I.A.A. Journal, vol. 7, n° 6, pp. 1 185-1 187 - June 1969 -

45. Stability of the triangular Points in the elliptic restricted Problem of three Bodies
K.T. Alfriend & R.H. Rand
A.I.A.A. Journal, vol. 7, number 6, pp. 1 024-1 028 - June 1969 -

46. Stability of the force-free Motions of a dual-spin Spacecraft
R. Pringle Jr.
A.I.A.A. Journal, vol. 7, n° 6, pp. 1 054- 1 063 - June 1969 -

47. Cours de Systèmes asservis non linéaires
C. Mira
Dunod Université, Paris - 1969 -

48. Instability Bounds in linearly stable Problems
L.M. Shotkin
Nuclear Science and Engineering, pp. 211-219 - 1969 -

49. Application of an equivalent nonlinear System Approach to dissipative dynamical Systems
W.D. Irvan
Journal of applied Mechanics, pp. 412-416 - September 1969 -

50. Membrane Flutter Paradox. An Explanation by singular - perturbation Method
J.H. Spriggs, A.F. Messiter & W.J. Anderson
A.I.A.A. Journal, vol. 7, n° 9, pp. 1 704-1 709 - September 1969 -

51. On the Stability of the Vibrations of two coupled Particles in the Plane
R.H. Rand & S.F. Tseng
Journal of applied Mechanics, pp. 417-419 - September 1969 -

52. Extension aux Cas résonants d'un Théorème de Liapounov sur les Mouvements périodiques voisins d'un Equilibre
J. Roels
Rapport n° 33 - Université catholique de Louvain - Décembre 1969 -

53. A new Approach to the Study of coupled nonlinear Systems
B.V. Dasarathy
A.I.A.A. Journal, vol. 8, n° 3, pp. 433-436 - March 1970 -

54. Perturbation Method in the Theory of nonlinear Oscillations
A.A. Kamel
N.A.S.A./C.R.- 1 554 - March 1970 -

55. On the Stability of linear discrete dynamic Systems
J.A. Walker
Journal of applied Mechanics, pp. 271-275 - June 1970 -

56. Two-to-One Resonances near the equilateral Libration Points
A.H. Nayfeh
A.I.A.A. Journal, vol. 9, n° 1, pp. 23-27 - January 1971 -

57. An approximate Method for nonlinear ordinary differential Equations
T.C. Soong
A.I.A.A. Journal, vol. 9, n° 6, pp. 1 175 - 1 182 - June 1971 -

58. Nonlinear Instability of a Helicopter Blade
(A.I.A.A. 2nd atmospheric Flight Mechanics Conference)
P. Tong
A.I.A.A. Paper n° 72-956 - September 1972 -

59. Perturbation and harmonic Balance Methods for nonlinear Panel Flutter
C.-C. Kuo & L. Morino
A.I.A.A. Journal, vol. 10, n° 11, pp. 1 479-1 484 - November 1972 -

60. Perturbation Methods
A.H. Nayfeh
John Wiley & Sons, Inc. - 1973 -